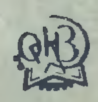
Р. В. ГАНГНУС и Ю. О. ГУРВИЦ

ГЕОМЕТРИЯ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ЧАСТЬ
II
СТЕРЕОМЕТРИЯ

Цена 3 р. 95 к.



УЧПЕДГИЗ
МОСКВА
1935

Р. В. ГАНГНУС и Ю. О. ГУРВИЦ

ГЕОМЕТРИЯ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ ВЫСШИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ
УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
И ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Стереометрия

Под редакцией
проф. И. К. АНДРОНОВА

УТВЕРЖДЕНО НАРКОМПРОСОМ РСФСР



ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1935

Ответств редактор *С Ю. Калецкий*
Технич. редактор *М. М. Хасина*

Сдано в набор 21/VI 1935 г. Подписано к печати 5/IX 1935 г.
Формат бумаги 62×94/16. Бум. фабрики „Герой труда". Тираж 20 000 экз.
Изд. листов 21 1/2, Бум листов 10 3/4. Авт. листов 30,21. В 1 бум. листе 109344 печ. зн.

Цена 3 руб. 45 коп., переплет 50 коп.

Учпедгиз № 7362. У-91.
Уполн. Главлита Б-11433.

Печатано с матриц в школе ФЗУ Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига", Москва, Колпачный, 13
Заказ 2276

ГЛАВА I.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОБЩЕЙ МЕТОДИКИ СТЕРЕОМЕТРИИ.

§ 1. Возникновение и развитие стереометрии.

Стереометрия.

1. Геометрия в пространстве, или стереометрия, — раздел геометрии, изучающий положение, форму и размеры пространственных фигур, а также их свойства и зависимость между отдельными их элементами.

Стереометрия — греческое слово; оно произошло от слов στερεόν — тело и μέτρος — мера.

И. Тропфке в своей истории элементарной геометрии указывает, что слово „стереометрия" впервые встречается непосредственно после Платона (427—348 до н. э.) у Филиппа из Опуса, и упоминает, что Платон не знал этого слова, что у Аристотеля (384—322 до н. э.) слово „стереометрия" встречается только один раз, затем оно без изменения перешло в латинский язык и встречается у Боэция (480—524).

Исторические сведения.

2. Развитие стереометрии началось значительно позднее развития планиметрии. Стереометрия, как и планиметрия, развивалась из наблюдений и решений вопросов, которые возникали в процессе практической деятельности человека. Несомненно, что уже первобытный человек, сменив кочевье на оседлую жизнь, занявшись земледелием, делал попытки оценивать, хотя бы в самых грубых чертах, размер собранного им урожая по массам хлеба, сложенного в кучи, копны или скирды.

Строитель даже самых древних примитивных построек должен был как-то учитывать материал, которым он располагал, и уметь подсчитать, сколько материала потребуется для возведения той или иной постройки.

Каменотесное дело у древних египтян и халдеев требовало знакомства с метрическими свойствами хотя бы простейших геометрических тел: куба, параллелепипеда, призмы, цилиндра и т. д.

Потребности земледелия, мореплавания, ориентировки во времени толкали людей к астрономическим наблюдениям, а последние — к изучению свойств сферы и ее частей, а следовательно, и законов взаимного расположения плоскостей и линий в пространстве.

Правильность сказанного подтверждается древнейшими памятниками, материальными и письменными.

Египетские пирамиды, главнейшие из которых были сооружены за 2, 3 и 4 тысячи лет до н. э., поражают нас точностью своих метрических соотношений; несомненно, строители их уже знали многие стереометрические положения и расчеты.

Это подтверждает расшифрованный древнейший папирус Голенищева, хранящийся в Музее изящных искусств в Москве, а также папирус Райнда, написанный писцом Ахмесом и хранящийся в Британском музее в Лондоне; оба папируса написаны в границах от 1700 до 2000 лет до н. э.

Оба эти папируса, как показали исследования, являются математическими руководствами, в которых приведено большое число задач с решениями. Что касается геометрии, то в папирусе Райнда в соответствии с практическим характером египетской науки приведены задачи, относящиеся к вычислению площадей прямолинейных фигур: прямоугольника, квадрата, прямоугольного треугольника и прямоугольной трапеции, и криволинейной — круга, а также правила для вычисления объемов египетских хлебных амбаров с прямоугольными и круглыми основаниями.

Приводим эти правила в современном алгебраическом обозначении:

$$1)\ V = abh + \frac{1}{2} abh; \quad 2)\ V = \left(\frac{8}{9} d\right)^2 h + \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9} d\right)^2 h.$$

К сожалению, нет достаточных данных для решения вопроса об их правильности, так как до сих пор неизвестна форма самих амбаров, объем которых вычисляется по приведенным формулам.

В папирусе Голенищева среди значительного числа разного рода практических задач приведено всего шесть с геометрическим содержанием; из них две на вычисление объема усеченной пирамиды и поверхности полусферы. Эти задачи приведены во второй части стабильного учебника по геометрии.

3. Греки, ученики египтян на первых порах своего исторического развития, использовали почерпнутые ими у последних первоначальные геометрические сведения для создания научной геометрии.

В период экономического и культурного расцвета Древней Греции и ее колоний геометрия достигла высокого теоретического развития. Следует упомянуть, что из числа выдающихся геометров Греции вопросами стереометрии интересовались А н а к с а г о р, Д е м о к р и т, Г и п п о к р а т (V в. до н. э.). Гиппократ является в числе первых, занимавшихся решением знаменитой задачи древности — д е л и й с к о й з а д а ч и об удвоении куба.

Ко времени Платона, в школе которого уделялось большое внимание математике, в частности геометрии, вопросы стереометрии еще не были систематизированы. Платон ратовал за работу над вопросами стереометрии и в своих высказываниях сожалел о незнании своими соотечественниками стереометрии.

„Что касается измерения всего того, что имеет длину, ширину и глубину, — говорил он, — то греки обнаруживают смехотворное и скудное познание того, что от природы в них вложено, и мне стыдно не только за себя, но и за всех греков“. В школе Платона проблемы стереометрии значительно продвинулись. Так, если пифагорейцы знали лишь о форме куба, тетраэдра и, быть может, о двенадцатигранннике, то Т е е т е т, один из представителей школы Платона (369 до н. э.), рассмотрел восьмигранник и двадцатигранник и дал впервые теорию некоторых свойств пяти правильных многогранников. Этими работами, повидимому, воспользовался Е в к л и д и изложил их в XIII книге своих „Начал“.

Должно отметить А р х и т а из Тарента (430—365 до н. э.), который в должной мере знал основы стереометрии. Он знал не только предложения, касающиеся взаимного пересечения плоскостей, но и отдавал себе ясный отчет об образовании цилиндра, конуса и тора и использовал получающиеся при взаимном пересечении этих тел кривые для решения проблемы об удвоении куба.

Упомянутый выше Демокрит высказал суждение, что объем пирамиды равен $\frac{1}{3}$ объема призмы, имеющей с пирамидой равновеликое основание и одинаковую высоту; исчерпывающее доказательство этого суждения было затем дано Евдоксом (408—355 до н. э.).

Особо следует упомянуть о Менехме (IV в. до н. э.), ученике Платона, впервые давшем некоторую теорию конических сечений.

4. Что касается Евклида, то величайшая его заслуга состоит в том, что он собрал, обработал и привел в стройную систему дошедший до него материал. Из 13 книг его „Начал" стереометрии отведены XI—XIII книги.

В XI книге изложены свойства прямых и плоскостей в пространстве и свойства параллелепипедов; в XII книге речь идет о пирамиде, конусе, цилиндре и шаре, в XIII книге — о правильных многоугольниках и многогранниках; более подробно учение о правильных многогранниках развивается в XIV и XV книгах.

Следует указать, что в некоторых изданиях „Начал" Евклида имеется не 13, а 15 книг; исторические исследования показали, что последние две книги написаны не Евклидом; XIV книга приписывается Гипсиклу Александрийскому (II в. до н. э), XV — Дамасцию (VI в) и др.

Собранные Евклидом сведения по стереометрии дополнил, углубил и расширил величайший математик древности Архимед (287 — 212). В своем трактате „О шаре и цилиндре", состоящем из двух книг, он доказывает, что поверхность шара вчетверо больше площади большого круга, что поверхность шарового сегмента равна площади круга, радиус которого равен прямой, соединяющей вершину сегмента с точкой окружности круга, служащего ему основанием, что объем и поверхность шара составляют $\frac{2}{3}$ объема и поверхности, соответственно, цилиндра, описанного около шара. Стереометрия обязана Архимеду и другими исследованиями: он дал тринадцать полуправильных тел, каждое из которых ограничено правильными многоугольниками, но не одного и того же рода, и вычислил объемы многих тел вращения. Благодаря трудам Архимеда стереометрия достигла своего кульминационного пункта, и элементарная геометрия в современном ее понимании была окончательно установлена; действительно, в нее входило все содержание „Начал" Евклида, измерение круга и шара, а также свойства сферических фигур, которые изучались древними как составная часть астрономии.

Следует упомянуть Паппа (около IV в.), составившего „Математический сборник" в 8 книгах, из которых первые две утеряны. В своем сборнике Папп приводит некоторые свои оригинальные исследования, большей же частью комментирует работы предшествовавших ему геометров; преимущественное значение работы Паппа состоит в том, что она дает возможность судить об отдельных работах, которые до нас не дошли. Нужно отметить, что Папп является автором теоремы: объем тела, образуемого вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости вращаемой фигуры, равен произведению площади фигуры на длину окружности, описываемой центром тяжести площади фигуры. Теорема эта впоследствии была названа именем Гюльдена (1577—1643), вновь открывшего ее.

5. После падения Греции наблюдается длительный застой в развитии математики и стереометрии в частности, длившийся тысячу лет.

Ни римляне, ни индусы, ни арабы почти ничего не прибавили к геометрической сокровищнице греков, и только с XVI—XVII вв., в период социального подъема, вызвавшего бурный рост в области науки, наблюдается оживление и математической мысли под давлением развивающейся техники.

Для развития стереометрии в новое время многое было сделано Кеплером (1571—1630). В своей „Новой стереометрии“ — „стереометрии бочек“ (1615) — он впервые употребил в геометрии бесконечно-малую величину. При вычислении объемов тел Кеплер избегает метода исчерпывания, введенного Евдоксом и Архимедом, и вводит бесконечно-малые величины. Так, он рассматривает шар „как бы“ состоящим из бесконечно большого числа конусов, вершины которых лежат в центре, а основания — на поверхности шара, и таким путем находит его объем.

Кеплер применял свой метод для определения объемов тел, образуемых вращением круга вокруг оси, лежащей в плоскости круга, в частности объема тела, образуемого вращением кругового сегмента вокруг его хорды, называя их то „лимоном“, то „яблоком“. Необходимо упомянуть о Кавальери (1591—1647) и его трудах: „Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых частей непрерывных величин“ (1635) и „Шесть геометрических этюдов“ (1647), в которых он главным образом сосредоточивает свое внимание на вычислении площадей, объемов и центров тяжести тел.

Открытие Ньютоном (1642—1727) и Лейбницем (1646—1716) интегрального исчисления окончательно разрешило проблему квадратуры и кубатуры.

§ 2. Задача изучения стереометрии.

1. Изучение стереометрии в средней школе ставит своей задачей развитие пространственных представлений учащихся, их пространственной интуиции, что достигается правильным прохождением первых глав стереометрии — положения основных образов.

Изучение стереометрии должно дать умение и навык отличать друг от друга формы различных основных тел, перечисляя их существенные признаки, знать образование отдельных тел, их свойства, соотношения между отдельными элементами тел, выполнять четкий чертеж несложного пространственного образа, разбираться в данном чертеже и вызывать в своем воображении по данному чертежу соответствующие геометрические образы, решать задачи на вычисление поверхностей и объемов тел и отдельных их частей, размеров отдельных их элементов, а также задачи на построение пространственных фигур. Изучение стереометрии, содействуя развитию пространственных представлений и пространственной интуиции, должно, в конечном счете, дать учащимся прочные навыки и знания, нужные им не только для дальнейшей учебной работы, но и для последующей практической работы в технике, в производстве, в строительстве.

2. Приступая с учащимися к изучению стереометрии, преподаватель должен помнить, что учащиеся за редкими исключениями обладают весьма слабыми пространственными представлениями, не умеют изобразить в должном виде трехмерный образ на двухмерной плоскости листа или доски, не умеют рассмотреть и тем самым представить себе изображенный в плоскости чертежа трехмерный геометрический образ. Чтобы преодо-

леть эти трудности, необходимо на первых порах широко пользоваться наглядными пособиями. Должны быть использованы всякого рода готовые модели тел, конструктивные ящики для выяснения учащимся в рассматриваемой пространственной фигуре взаимоположений отдельных основных элементов фигуры: точек, прямых и плоскостей; наряду с этим сами учащиеся должны научиться строить изучаемую фигуру из какого-либо материала и изображать ее на плоскости.

Рассмотрение и подробный разбор вопроса на модели или построение модели как нельзя лучше помогает учащимся выяснить взаимное расположение элементов пространственной фигуры и приучает их воссоздавать в своем воображении требуемый геометрический образ в целом и видеть взаимное расположение отдельных его элементов.

В силу сказанного должны быть использованы при изучении стереометрии, в особенности первых ее глав, всякого рода наглядные пособия: основное стереометрическое пособие, состоящее из набора спиц, планок, пластинок, готовые модели тел, сплошные и разборные, таблицы и т. п.

Следует иметь в виду, что приучение учащихся к геометрическому конструированию особенно ценно тем, что служит полезной подготовкой к работам по техническому конструированию. И школа, которая должна серьезно ставить дело изучения стереометрии, обязана найти пути и средства обеспечить занятия необходимыми учебными пособиями.

§ 3. Наглядные пособия.

1. Одним из полезных наглядных пособий по стереометрии является пособие С. П. Острейко.

В объяснительной записке к пособию, описание которого дано ниже, С. П. Острейко говорит:

„Меня давно занимала мысль иметь под руками при преподавании стереометрии такой материал, при помощи которого преподаватель и учащийся могли бы легко и без большой потери времени осуществлять любые несложные стереометрические построения. О громадном значении такого учебного пособия распространяться не приходится. Стереометрия затрудняет учащихся главным образом тем, что построение ее нужно „воображать“, так как чертежи в ней являются условным изображением на плоскости того, что размещено в пространстве. Готовые модели, которыми обыкновенно пользуются при обучении стереометрии, не могут вполне заменить то, что я имею в виду. Прежде всего, этих моделей должно быть очень большое количество, если мы желаем, чтобы для всякой теоремы, задачи и вопроса, какие могут встретиться, у нас была готовая модель. Но это неудобство все-таки только практического характера, и с ним еще можно было бы мириться. Гораздо существеннее то, что учащийся, рассматривая готовую модель, пассивно воспринимает формы и свойства той фигуры, которую она изображает. Ближе и интимнее вникнет он в формы и соотношения частей фигуры, если он сам построит ее по данному заданию. Между прочим, только при существовании такого пособия учащийся может отчетливо уяснить себе ход построения стереометрической фигуры в том именно порядке, какой соответствует ходу доказательства или заданию задачи“.

Составными частями прибора С. П. Острейко служат:

1) Набор цветных деревянных палочек и металлических скреплений к ним; эти скрепления позволяют легко строить из палочек по данным заданиям призмы и пирамиды. Скрепления сделаны из мягкого металла (меди), легко деформируются простым нажимом пальцев; это дает возможность придавать палочкам направления под любыми углами друг к другу.

2) Прямоугольная рама размером 18 *дм* × 13 *дм* (рис. 1), на которой натянуты с обеих сторон проволочные сетки с отверстиями такой величины, чтобы палочки, служащие для построений, могли вдвигаться в эти отверстия с некоторым усилием. Такая рама позволяет осуществлять построения, относящиеся ко взаимному расположению прямой и плоскости, и составлять такие геометрические фигуры, для построения которых используются только одни палочки и скрепления. Так, для построения пирамиды с квадратным основанием и ребром, перпендикулярным к плоскости основания, достаточно воткнуть палочки в соответствующие отверстия, скрепить их в вершине и положить на сетку палочки, изображающие основание пирамиды.

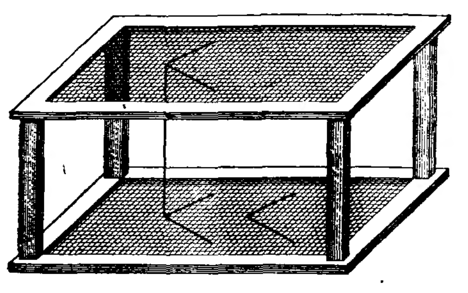


Рис. 1.

3) Вторая прямоугольная рама с натянутой на ней проволочной сеткой, которая служит для построений, связанных с параллельными плоскостями. Рама устанавливается на вставных ножках, для которых в первой раме имеются углубления. Вторая рама используется для иллюстрации теорем, относящихся к параллельным плоскостям, теоремы о перпендикуляре к плоскости, для построения сечения пирамиды плоскостью, параллельной основанию, и т. д., как это видно из рисунков 2 и 3.

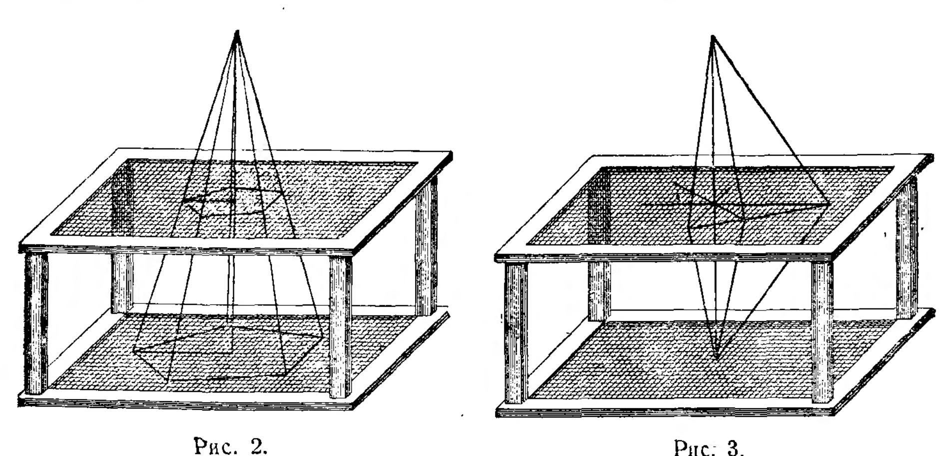


Рис. 2. Рис. 3.

4) Две модели прямоугольников из жести, окрашенные белой краской, с приделанными ножками для установления этих моделей на раме. Модели прямоугольников могут быть установлены и перпендикулярно и наклонно к раме и используются для иллюстрации взаимного расположения плоскостей.

5) Две пары моделей прямоугольников из жести, окрашенных в белый цвет; они связаны навесками так, что могут служить моделями двугранных углов.

При помощи перечисленных приспособлений могут быть выполнены все построения, относящиеся к курсу стереометрии, исключая круглые тела. Весьма полезно, чтобы учащиеся, отвечая урок (будь то доказательство теоремы или решение задачи), строили при помощи пособия геометрический образ, соответствующий теореме или задаче; использование наглядного пособия, однако, отнюдь не исключает необходимости приобретения навыков пользоваться при ответе чертежом.

2. Помимо описанного пособия С. П. Острейко, следует указать на „универсальный набор по стереометрии", состоящий из доски, на которой монтируются модели геометрических фигур, встречающихся в различных теоремах стереометрии, набора металлических спиц, прямоугольных кусков картона и кусочков пробки.

Детальное описание указанного пособия, методика его применения, а также описание различных моделей по стереометрии, изготовляемых в процессе урока из листа бумаги или картона, даны в книге П. А. Карасева „Учебно-наглядные пособия по математике и методика работы с ними в средней школе", Учпедгиз, М., 1933.

3. Весьма полезной является книга Г. Дресслера „О наглядных пособиях по математике" (преимущественно для средней школы), М., 1914.

Небольшой материал по истории наглядного обучения имеется в книге В. Мрочек и Ф. Филипповича „Педагогика математики", СПБ, 1910.

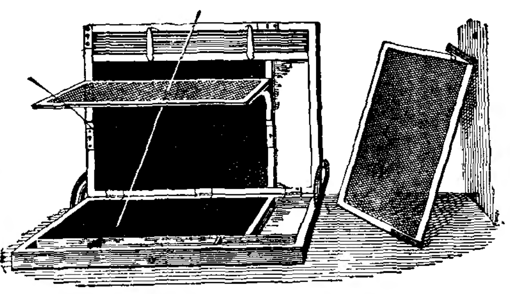


Рис. 4.

4. Пособием при прохождении курса стереометрии может служить также „геометрический ящик", конструкция которого дана авторами книги; ящик может быть изготовлен собственными силами школы и самими учащимися[1]. Это — двустворчатый ящик (рис. 4), изготовленный из 3-миллиметровой фанеры; каждая его створка высотой 3—4 *см* доверху заполнена пластелином или хорошей, жирной глиной; створки скреплены шарнирами и могут образовать между собой двугранные углы величиной до 180°. Для отсчета величины двугранных углов к одной из створок (или к обеим) прикреплен наглухо транспортир, при этом небольшой штифтик, прикрепленный к другой створке, указывает соответствующее деление транспортира; имеющиеся зажимные винты удерживают обе створки в требуемом положении. Ящик снабжен набором разноцветных тонких палочек разной длины, запасом пластелина для скрепления палочек и набором плоских прямолинейных фигур и кругов различных радиусов, изготовленных из картона или тонкой фанеры, а также двумя рамами, сделанными из металлической сетки; эти рамы служат моделями плоскостей. Если поставить створки ящика под углом в 90° друг к другу, то к одной из створок ящика можно прикрепить одну или обе рамы-плоскости; через эти плоскости — металлические сетки — свободно проходят палочки, служащие моделями прямых и отрезков. Такой ящик

[1] Ящик изготовляется в мастерской наглядных пособий рабфака НКПС, Москва, Бабушкин п р., 4.

позволяет иллюстрировать все встречающиеся в элементарном курсе геометрии вопросы, исключая вопросы, относящиеся к шару.

При изучении шара и его частей следует использовать в качестве модели большой черный матовый шар на подставке, на котором учащиеся могли бы проводить мелом линии, нужные для выяснения и решения отдельных вопросов.

Желательно, чтобы при занятиях стереометрией на каждые 3—5 учащихся приходилось не менее одного геометрического ящика и одной модели шара.

5. Не менее ценным пособием при изучении стереометрии являются также стереоскопические изображения геометрических фигур, рассматриваемые в стереоскоп при разборе теоремы и изучении того или иного тела. Для достижения цели желательно, чтобы у 1—3 учащихся при работе в классе был стереоскоп с набором соответствующих картин. Набор таких стереоскопических картин „Стереометрия в стереоскопе“ был составлен А. Я. Юсевичем и инж. А. Н. Замятиным. Приводим образцы стереоскопических рисунков-стереограмм (рис. 5 и 6). Приложенные стереограммы многогранников, рассматриваемые в стереоскоп, кажутся как бы стеклянными и выделяются весьма рельефно. Требуемая иллюзия достигается тем, что рисунки, как, например, приложенные рисунки додекаэдра и икосаэдра, даются на черном фоне, причем левый рисунок имеет черные грани и белые ребра, правый же — белые грани и черные ребра. Если школа располагает стереоскопическим фотографическим аппаратом и геометрическим ящиком, то можно собственными силами изготовить стереограммы. Для этого нужно „построить“ при помощи геометрического ящика соответствующую фигуру, сфотографировать ее и напечатать затем с негатива любое количество стереограмм. Такая работа представляет для учащихся значительный интерес, весьма полезна для них и позволяет школе накопить ценные и нужные пособия для работы по стереометрии.

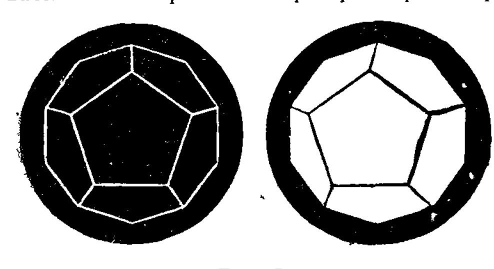


Рис. 5.

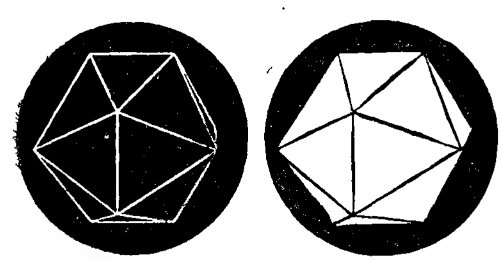


Рис. 6.

Полезным пособием являются также стереометрические анаглифы. Это — таблицы, на которых даны двуцветные стереоскопические изображения стереометрических образов, которые кажутся рельефными, если рассматривать их через особые очки, в которые вместо стекол вставлены прозрачные пленки-светофильтры, красная — для левого глаза и зеленая — для правого.

При объяснении преподавателем свойств какого-либо стереометрического образа на стене в классе вывешивается таблица с изображением

соответствующего стереометрического образа, и учащиеся, рассматривая анаглиф при помощи очков с светофильтрами, получают полную иллюзию пространственного образа.

Пользование анаглифами-таблицами следует рекомендовать школе; они помогают учащимся выяснить взаимное положение отдельных элементов пространственных образов, что особенно трудно дается учащимся, если им приходится при изучении свойств пространственного образа ограничиваться только его изображением на рисунке.

§ 4. Об изображении стереометрических фигур.

Умение изображать трехмерные образы на плоскости представляет для учащихся одну из значительных трудностей, которую они должны преодолеть при изучении стереометрии.

Понятно, что преподаватель должен уметь давать хорошо выполненные рисунки, необходимые при рассмотрении отдельных вопросов стереометрии, а также научить учащихся строить трехмерные геометрические образы на плоскости чертежа, притом так, чтобы по изготовленному в определенном масштабе рисунку можно было судить не только о форме, но и о размерах его.

Если между рассматриваемым предметом, например кубом, поставленным на горизонтальную плоскость, и наблюдателем вообразить прозрачный экран (обычно вертикальную плоскость), то, проводя из вершин куба лучи к фокусу глаза, получим в пересечении этих лучей с плоскостью экрана отображение вершин куба, по которым легко нарисовать отображение куба на картинной плоскости.

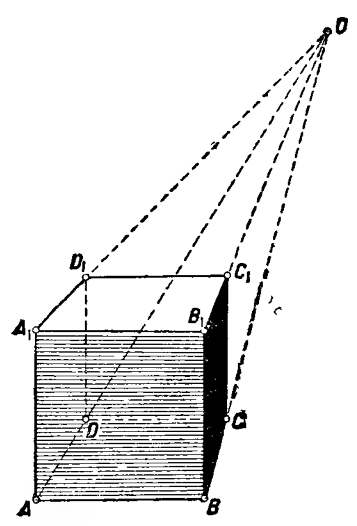


Рис. 7.

Такое изображение называется центрально-перспективным. Это изображение, будучи рассматриваемо из точки положения глаза, дает такое же представление о форме куба, как и сама натура, и является потому вполне наглядным. Однако по такому наглядному изображению нельзя непосредственно измерить отдельные элементы тела и судить о взаимном их положении. Так, например, прямые углы граней, не параллельных картинной плоскости, кажутся искаженными, отдельные ребра — сокращенными в различной степени, параллельные ребра изображены сходящимися (рис. 7) и т. д. Чем дальше от картинной плоскости расположен глаз наблюдателя, т. е. чем меньше углы между лучами, проведенными к глазу, тем меньше различие между размерами параллельных отрезков, тем больше приближается изображение параллельных отрезков к параллельным.

При бесконечно удаленной точке зрения получим изображение того же куба, показанное на рисунке 8. Это изображение дает достаточно наглядное представление о форме куба и вместе с тем дает возможность

непосредственно измерять ребра куба, параллельные картинной плоскости, а также и ребра, перпендикулярные к плоскости картины, коэфициент сокращения которых по отношению к ребрам, направленным параллельно плоскости, представляет постоянную величину.

Такое изображение носит название **кабинетной проекции**. Обычно при изображении куба в кабинетной проекции принимают угол φ отклонения от горизонтального направления прямых, перпендикулярных к картинной плоскости, равным 45° (можно принять и 30°) или 135°, а коэфициент k сокращения отрезков в этом направлении равным 0,5. Таким образом построена кабинетная проекция куба на рисунке 8.

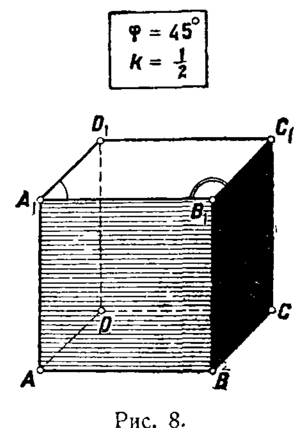


Рис. 8.

Необходимо иметь в виду, что изображение пространственной фигуры в параллельной косоугольной перспективе дает наглядное представление о форме тела и позволяет непосредственно установить размеры изображаемого тела вдоль трех основных направлений, если указан масштаб, в котором дано изображение тела.

Параллельной косоугольной проекцией пользуются для изображения пространственных фигур, которые рассматриваются в стереометрии; построение изображений в такой проэкции весьма просто, но все же требует для приобретения навыка в правильном и быстром изображении той или иной фигуры выполнения значительного числа упражнений.

Указания, как выполняются построения разного рода фигур в параллельной косоугольной проекции, даны во второй части стабильного учебника. Преподаватель обязан своевременно с ними ознакомиться и владеть в должной мере техникой построения изображений фигур. Подробный разбор с учащимися построения методом параллельной косоугольной проекции следует отнести по времени к сроку, когда учащимися уже рассмотрены вопросы о взаимном положении прямых и плоскостей в пространстве.

Однако уже с первых шагов преподаватель должен давать изображения пространственных фигур с соблюдением приемов, указанных в главе XIII второй части стабильного учебника, хотя бы в пределах глазомерной точности.

§ 5. Задачи на построение в стереометрии.

Задачи на построение в стереометрии, в отличие от задач на построение в планиметрии, представляют для учащихся значительные трудности, так как в планиметрии легко связывать геометрические образы с их изображением на чертеже. Следует различать два вида фактически построенных стереометрических образов: 1) действительное построение в определенном масштабе пространственной фигуры, иначе говоря, построение модели фигуры; построение, например, при помощи геометрического ящика каркасной модели фигуры, ребрами которой являются тонкие деревянные палочки, и 2) построение на плоскости, имеющей только два измерения, изображения пространственной фигуры, имеющей три измерения. С самого начала курса стереометрии следует познако-

мить учащихся с несложными построениями изображений пространственных фигур с помощью так называемой параллельной косоугольной проекции. Когда же учащиеся проработают теоремы о взаимном положении прямых и плоскостей в пространстве, следует углубить и расширить вопрос о построении пространственных образов. Известно, как часто неумение построить требуемую задачей фигуру служит камнем преткновения при решении тех или других вопросов стереометрии, между тем как умение выполнить четкое построение фигуры помогает учащимся понять задачу и найти правильные пути к решению поставленных вопросов.

Прежде всего следует указать, что в стереометрии при выполнении построений приходится пользоваться всеми элементарными построениями планиметрии; о них была речь в первой части настоящей книги.

К числу элементарных построений в стереометрии относятся следующие:

1. Построение плоскости, если в пространстве заданы три какие-либо точки, не лежащие на одной прямой, или прямая и точка вне этой прямой, или две пересекающиеся прямые, или, наконец, две параллельные прямые.

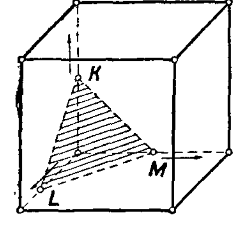


Рис. 9.

При наличии одного из приведенных условий плоскость считается построенной. Надо добиваться, чтобы учащиеся научились „видеть“ плоскость, определяемую указанными выше элементами, и умели изображать плоскость на чертеже в виде какой-либо плоской фигуры, являющейся ограниченной частью плоскости, например в виде прямоугольника, треугольника или параллелограма, плоскость каждого из которых совпадает с плоскостью, подлежащей изображению. Надо также научить учащихся видеть соответствующую плоскость в каких-либо заданных телах. Можно начать с того, чтобы учащиеся дали, например, изображение плоскости, которая проходит через три точки, лежащие на трех ребрах куба, выходящих из одной его вершины. Для выяснения положения такой плоскости в кубе можно рекомендовать учащимся построить куб на геометрическом ящике, отметить на его ребрах какие-либо три точки, положим, K, L и M (рис. 9), а затем, зная, что три точки, не лежащие на одной прямой, вполне определяют положение плоскости, соединить прямыми точки K и L, L и M, M и K; эти прямые, согласно определению плоскости, лежат в искомой плоскости, следовательно, плоскость треугольника KLM совпадает с искомой плоскостью. При таком построении учащиеся действительно „видят“, как расположена в кубе плоскость треугольника KLM. Если после этого предложить учащимся построить на доске или листе бумаги изображение и куба и плоскости, проходящей через точки K, L и M, взятые на ребрах куба, то надо думать, что выполняемый ими рисунок будет сделан с должным пониманием положения искомой плоскости; точки K, L и M можно отметить цветными мелками или карандашами, треугольник KLM заштриховать.

В целях развития пространственных представлений учащихся следует предложить им указать различные возможные положения плоскостей, проходящих через точки K, L и M, каждая из которых до тех пор перемещается вдоль ребра куба, пока не совпадет с вершиной куба; следует построить плоскость, проходящую при заданном условии через вершины куба; понятно, что в сечении получится равносторонний

треугольник, так как каждая его сторона является диагональю одной из равных граней куба (рис. 10). Необходимо в отдельных случаях те или иные задачи на построение использовать для решения задачи на вычисление. Так, в данном случае можно вычислить сторону полученного в сечении треугольника, а также его площадь, приняв за данное длину a ребра куба.

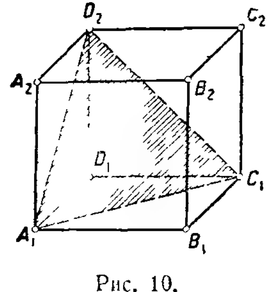


Рис. 10.

Элементарными задачами на построение являются также:

2. Построение произвольной точки, лежащей в данной плоскости или вне ее.

3. Построение произвольной прямой, лежащей в данной плоскости или вне ее.

4. Построение на данной плоскости прямой, проходящей через точку, данную на этой плоскости, и построение прямой, пересекающей данную плоскость.

5. Проведение прямой пересечения двух пересекающихся плоскостей.

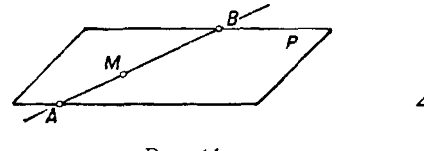


Рис. 11.

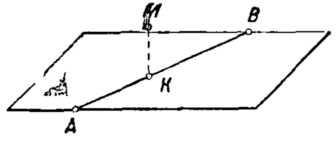


Рис. 12.

В целях правильного и четкого выполнения построения полезно дать учащимся следующие указания.

Если требуется изобразить плоскость P и точку M на ней, то иногда целесообразно для большей наглядности начертить на плоскости произвольную прямую, проходящую через заданную на плоскости точку M, например, прямую AB (рис. 11); это делается для того, чтобы можно было „видеть", что точка M действительно лежит на плоскости P, а не вне ее, как это имеет место на рисунке 12, на котором точка M изображена помещенной вне плоскости P, точка же K изображена лежащей на плоскости P и притом на прямой AB, расположенной в этой плоскости. Надо отметить, что, если точка дается на рисунке лежащей вне данной плоскости, целесообразно одновременно указать и ее расстояние от заданной плоскости, понятно, после прохождения вопроса о перпендикуляре к плоскости. Чтобы, однако, показать, что какая-либо прямая пересекает горизонтальную плоскость P и одновременно проходит через заданную на ней точку K, рекомендуется выполнять построение так, как это показано на рисунке 13, где из произвольных точек A и B, лежащих на заданной прямой по разные стороны от плоскости P, проведены к плоскости P перпендикуляры AA_1 и BB_1.

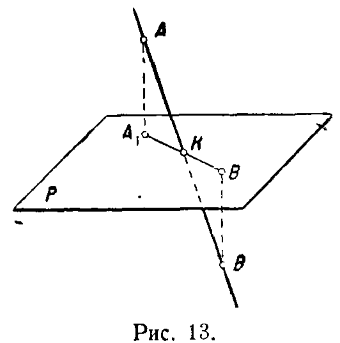


Рис. 13.

Для выяснения учащимися всего своеобразия решения задач на построение в пространстве и для ознакомления их с различными способами решения следует проделать с ними достаточное число задач; практика в решении задач на построение помогает учащимся развить пространственную интуицию, научиться видеть пространственные фигуры, правильно „строить" их модели на геометрическом ящике и правильно изображать их на классной доске и в тетради. Обычно наиболее трудными являются для учащихся задачи на построение изображений различных положений прямых и плоскостей в пространстве, если прямые и плоскости рассматриваются оторванными от тел, без непосредственной связи с какими-либо из них. Решение таких вопросов сугубо требует наличия у учащихся хороших пространственных представлений, а также хорошего знания предмета, так как каждое выполненное построение требует обоснования и доказательства на основании известных учащимся аксиом и теорем, что построение выполнено правильно. Геометрический ящик оказывает в данном случае большую услугу, и на первых порах, в особенности в классах, в которых много отстающих, следует чаще предварять построение изображения пространственной фигуры построением ее модели на геометрическом ящике, помня, однако, что чрезмерное пользование наглядными пособиями может дать и отрицательные показатели.

ГЛАВА II.

ПЕРВЫЕ УРОКИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ.

§ 6. Введение.

Приступая к изучению стереометрии, следует пояснить учащимся, чем занимается стереометрия и в чем ее отличие от планиметрии. Если планиметрия занимается изучением геометрических фигур на плоскости, то стереометрия изучает геометрические фигуры, которые всеми своими точками не могут поместиться на одной плоскости. Сказанное должно быть иллюстрировано моделями некоторых геометрических образов, показом четких чертежей в кабинетной проекции и вычерчиванием на доске нескольких несложных пространственных образов, например прямой AB, пересекающей плоскость P, двух пересекающихся плоскостей P и Q, куба AC_1 и т. п. (рис. 14).

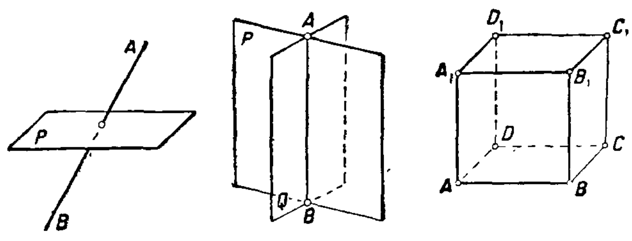


Рис. 14.

Не должно быть упущено указание, что окружающие нас предметы или отдельные их части представляют собой модели самых разнообразных тел, простейшие из которых изучает стереометрия. На первом же

занятии следует подчеркнуть учащимся, что для того, чтобы „видеть" и разбираться в том или ином пространственном образе, большое значение имеет правильное и четкое его изображение на чертеже, и что приобретение навыка давать правильный и четкий чертеж является сугубо необходимой задачей, не всегда, однако, простой и легкой.

§ 7. Прямая в пространстве.

1. Подробнее необходимо остановиться на некоторых аксиомах прямой в пространстве, проводя аналогию с соответствующими аксиомами прямой на плоскости.

1) Через любую точку плоскости можно провести бесчисленное множество прямых, пучок прямых.	1) Через любую точку пространства можно провести бесчисленное множество прямых, связку прямых.
2) Через две различные точки плоскости можно провести одну и только одну прямую, или, что то же самое, две различные точки плоскости определяют только одну прямую.	2) Через две различные точки пространства можно провести одну и только одну прямую, или, что то же самое, две различные точки пространства определяют только одну прямую.

3) Прямая мыслится безгранично продолженной в обе стороны.

Делается вывод, что прямая двумя различными точками определяется однозначно как на плоскости, так и в пространстве.

Приведенные суждения являются аксиомами прямой в пространстве.

2. В целях развития пространственных представлений учащихся не бесполезно рассмотреть с ними вопрос о наибольшем числе прямых, которые можно провести в пространстве через n различных точек, при условии, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Методика разбора данного вопроса аналогична методике рассмотрения соответствующего вопроса планиметрии. И в данном случае решение вопроса указывает, что через n различных точек пространства, если никакие три из них не лежат на одной прямой, можно провести

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} \text{ прямых.}$$

§ 8. Плоскость. Ее определение и основные теоремы.

1. Вопросу определения понятия плоскости и положения плоскости в пространстве, а также образования плоскости движением прямой должно быть уделено достаточное внимание.

Определение понятия плоскости приведено Евклидом в I книге. Указав, что *поверхность есть то, что имеет только длину и ширину*, Евклид говорит: *плоская поверхность есть та, которая одинаково расположена относительно прямых линий, на ней лежащих.*

Данное Евклидом определение плоскости страдает той же неясностью, как и его определение прямой. Новейшие геометры дали другие определения плоскости.

Фурье (1768—1830) дает следующее определение плоскости: *плоскость есть геометрическое место точек в пространстве, равно*

удаленных от двух данных точек в пространстве, или *плоскость есть геометрическое место всех прямых, перпендикулярных к данной прямой в данной на ней точке.*

Лежандр (1752—1833) определяет плоскость *как поверхность, с которой прямая, имея с ней две общие точки, совмещается всеми своими точками, где бы на плоскости ни были взяты две точки.*

Бальтцер (1818—1887) говорит: *плоскость есть поверхность, которая образуется движением прямой, проходящей через данную точку и скользящей по данной прямой.*

Следует обратить внимание на то, что определение понятия плоскости тесно связано с определением понятия прямой.

Учащимся следует дать определение плоскости, данное Лежандром, при этом в следующей формулировке: *плоскостью называется поверхность, обладающая тем свойством, что прямая, проходящая через любые две точки этой поверхности, лежит в ней всеми своими точками.*

Заметим, что Евклид, дав определение плоскости, доказывает в XI книге следующие два предложения:

1) части прямой линии не могут лежать одна над плоскостью, а другая в самой плоскости;

2) две пересекающиеся прямые линии лежат в одной плоскости; точно так же любой треугольник лежит в одной плоскости.

В современных учебниках элементарного курса геометрии первое из указанных предложений Евклида не доказывается; оно и понятно: суждение, высказанное в этом предложении, есть следствие, вытекающее из определения плоскости; второе же предложение Евклида рассматривается как следствие, вытекающее из теоремы: **через три различные точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну,** и обычно формулируется словами: **через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.**

2. Проработку темы „плоскость“ можно провести в следующем порядке. Дается определение плоскости и указывается, что из определения плоскости непосредственно вытекает, что прямая, имеющая с плоскостью две общие точки, лежит в ней всеми своими точками; поясняется, что плоскость мыслится безгранично продолженной во все стороны; последнее вытекает из того, что любая прямая, лежащая в плоскости, мыслится безгранично продолженной в обе стороны; обращается внимание учащихся и на то, что плоскость делит пространство на две части, на две области, расположенные по обе стороны от плоскости.

Полезно рассмотреть различные положения одной и двух точек относительно плоскости и рассмотреть соответствующие простейшие вопросы, естественно возникающие.

1) Точка A лежит в плоскости. Если при этом точка A служит началом луча, то возможны два случая: либо луч расположен в самой плоскости, либо луч уходит в область, расположенную по одну или по другую сторону плоскости (рис. 15).

Рис 15.

2) Две точки A и B лежат в плоскости. Эти точки определяют собой прямую, которая всеми своими точками лежит в плоскости. Эта прямая разбивает плоскость на две „полуплоскости“ (рис. 16).

Две точки A и B лежат по разные стороны плоскости, в различных областях. Если соединить данные две точки A и B прямой, то прямая AB пересечет плоскость в некоторой единственной точке C (рис. 17). Точка пересечения прямой и плоскости называется *следом*, или *основанием*, прямой.

Суждение: *если две точки лежат по разные стороны плоскости, то прямая, проходящая через них, пересекает плоскость* принимается за аксиому.

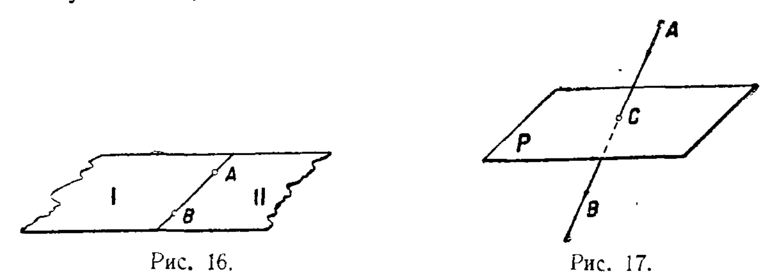


Рис. 16. Рис. 17.

Данное суждение позволяет отметить, что переход из одной области пространства в другую может быть совершен лишь при условии пересечения плоскости.

3. На выяснение необходимых и достаточных условий, определяющих положение плоскости в пространстве, должно быть обращено сугубое внимание.

Учащимся указывается, что через любую точку пространства, а также через любую прямую в пространстве, а следовательно, и через две любые точки, так как прямая определяется двумя точками, можно провести бесчисленное множество плоскостей.

Последние суждения — аксиомы плоскости; точно так же принимается в качестве аксиомы плоскости суждение, что плоскость можно вращать вокруг любой прямой, в ней лежащей. Грубой иллюстрацией последнего факта может служить вращение двери, оконной рамы или крышки коробки вокруг неподвижной оси.

Суждение: ***через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну,*** дается учащимся в качестве аксиомы. Гильберт в своих „Основаниях геометрии" в числе первой группы аксиом, аксиом сочетания, дает следующие две аксиомы:

1) три не лежащие на одной и той же прямой точки A, B, C всегда определяют плоскость α;

2) любые три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, определяют эту плоскость.

Справедливость аксиом иллюстрируется рядом фактов. Так, если воткнуть в стол три булавки таким образом, чтобы они не были расположены на одной прямой, то положенный на них кусок картона или стеклянная пластинка займут определенное положение; дверь, насаженная своими петлями на два неподвижных крючка, может вокруг них вращаться, как вокруг оси; если же поставить на пути движения двери какое-либо препятствие и рассматривать последнее как третью неподвижную точку, то движение двери остановится, и дверь займет определенное положение.

До последнего времени приведенное выше суждение принималось за теорему, именно в части единственности плоскости. Приводим соответствующее доказательство.

***Теорема.* Через три различные точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.**

Дано: точки A, B и C, не лежащие на одной прямой.

Треб. док.: через точки A, B и C можно провести единственную плоскость P

Доказательство. Через данные две точки A и B проводим плоскость P (рис. 18). Плоскость P, вращаясь вокруг неподвижной прямой AB, проходит через все точки пространства, а следовательно, она пройдет и через третью данную точку C. На это рассуждение надо смотреть не как на логическое доказательство, а как на активную работу интуитивного мышления.

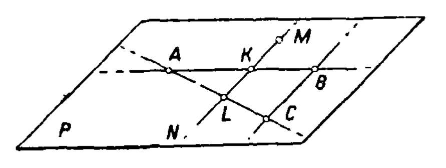


Рис. 18.

Для доказательства единственности допустим, что через данные три точки A, B и C проведена еще одна плоскость, плоскость Q, и докажем, что любая точка M плоскости P принадлежит также и плоскости Q.

Для этого проводим на плоскости P прямые через точки A и B, B и C, A и C; тогда лежат

на плоскости P:	на плоскости Q:
1) точки A, B и C;	1) точки A, B и C;
2) прямые AB, BC и AC;	2) прямые AB, BC и AC;
3) точка M.	3) относительно точки M неизвестно, лежит ли она на плоскости Q или нет.

Проводим затем на плоскости P через точку M произвольную прямую MN. Эта прямая пересечет две из трех прямых AB, BC и AC, ибо прямая MN не может быть одновременно параллельной двум из них, так как в этом случае через одну точку проходили бы две прямые, параллельные третьей. Пусть прямая MN пересекает прямые AB и AC в точках K и L; тогда лежат

на плоскости P:	на плоскости Q:
4) точки K и L;	4) точки K и L;

ибо прямые AB и AC, которым принадлежат точки K и L, лежат в обеих плоскостях,

5) прямая KL;	5) прямая KL;
6) точка M.	6) точка M.

Итак, произвольно взятая на плоскости P точка M принадлежит обеим плоскостям P и Q. Отсюда следует, что любая точка плоскости P принадлежит и плоскости Q, а это означает, что плоскости P и Q совпадают и, следовательно, через три данные точки A, B и C можно провести только одну плоскость.

4. Как следствие из рассмотренной теоремы вытекает, что положение плоскости в пространстве также определяется:

1) прямой и точкой вне этой прямой, так как данная вне прямой точка и любые две точки данной прямой дают три точки, не лежащие на одной прямой, через которые можно провести единственную плоскость;

2) двумя пересекающимися прямыми, так как точка пересечения двух прямых вместе с двумя другими точками, взятыми по одной на каждой из данных прямых, дают три точки, не лежащие на одной прямой, через которые проходит одна, и только одна, плоскость;

3) двумя параллельными прямыми, так как, согласно определению, параллельные прямые лежат в одной плоскости; эта плоскость — единственная, так как через одну из данных параллельных прямых и произвольную точку другой параллельной прямой можно провести одну, и только одну, плоскость.

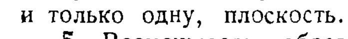


Рис. 19.

Рис. 20.

5. Возможность образования плоскости движением прямой может быть показана учащимся.

Так, плоскость образуется, если:

1) прямая AB вращается вокруг одной неподвижной точки A и одновременно скользит по некоторой прямой MN (рис. 19);

2) прямая AB скользит по двум неподвижным параллелям KL и MN (рис. 20);

3) прямая AB скользит по двум неподвижным пересекающимся прямым KL и MN (рис. 21);

4) прямая AB перемещается параллельно самой себе и скользит при этом по неподвижной прямой MN (рис. 22).

Рис. 21.

Рис. 22.

Дается указание, что прямая AB, движением которой образуется плоскость, называется *образующей*, а неподвижная прямая MN или неподвижные прямые KL и MN, по которым скользит образующая AB, называются *направляющими*.

Пересечение двух плоскостей.

5. Суждение: *две плоскости пересекаются по прямой линии* можно дать учащимся в качестве аксиомы. Гильберт в числе восьми аксиом сочетания дает аксиому: если две плоскости α и β имеют общую точку A, то они имеют по меньшей мере еще одну общую точку B. На основании данной и других аксиом сочетания Гильберт как следствие рассматривает теорему, часть которой гласит: две плоскости или не имеют ни одной общей точки, или имеют общую прямую.

В традиционных курсах геометрии указанное выше суждение считается теоремой.

***Теорема.* Если две плоскости P и Q имеют одну общую точку M, то они имеют и общую прямую MN, проходящую через точку M, т. е. плоскости P и Q пересекаются по прямой MN.**

Доказательство. Пусть даны две плоскости P и Q и пусть эти плоскости имеют одну общую точку M (рис. 23). Проведем в плоскости Q через точку M какие-нибудь две прямые AB и CD и возьмем на прямой AB точку A, а на прямой CD точку D так, чтобы выбранные точки A и D лежали в разных областях относительно плоскости P. Соединив точки A и D прямой AD,

убеждаемся, что прямая AD лежит в плоскости Q и имеет с плоскостью P общую точку N, точку пересечения прямой AD с плоскостью P; эта точка N принадлежит не только плоскости P, но и плоскости Q; вместе с тем точка N отлична от точки M. На самом деле, если бы точка N совпала с точкой M, то прямая AD совпала с прямой AB, чего, однако, быть не может, так как точка D прямой AD не лежит на прямой AB.

Итак, по условию, точка M принадлежит плоскостям P и Q; им же принадлежит и точка N, следовательно, прямая MN, проходящая через точки M и N, принадлежит обеим плоскостям, плоскостям P и Q.

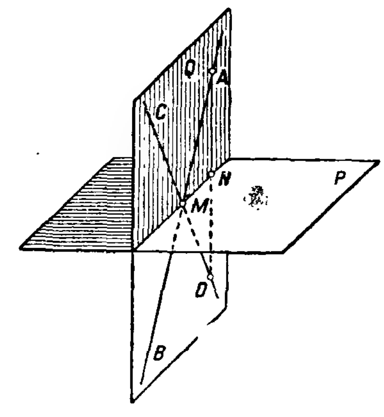


Рис. 23.

Рассмотренную теорему доказывают и иными рассуждениямн.

Допустим, что плоскости P и Q пересекаются не по прямой, а по кривой линии или ломаной. Если допустить, что плоскости пересекаются по кривой, то можно выбрать на полученной кривой произвольные три точки и провести через них плоскость, положим плоскость S, так как взятые три точки не лежат на одной прямой. Но выбранные на кривой произвольные три точки одновременно лежат и в плоскостях P и Q, следовательно, плоскость S должна совпадать и с плоскостью P и с плоскостью Q, а это означает, что плоскости P и Q, а также и плоскость S совпадают.

Аналогичными рассуждениями мы придем к такому же выводу, если допустить, что плоскости P и Q могут пересечься по л о м а н о й.

Отсюда вывод: если две плоскости не совпадают, но при этом имеют хотя бы одну общую точку, то они имеют и общую прямую, по которой они пересекаются.

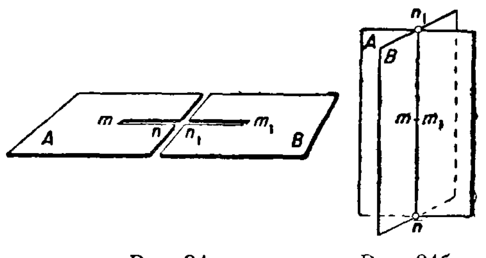


Рис. 24а. Рис. 24б.

При рассмотрении двух пересекающихся плоскостей следует указать учащимся, что двумя пересекающимися плоскостями пространство делится на 4 области.

Для лучшего уяснения учащимися рассмотренных фактов надлежит использовать соответствующие наглядные пособия.

Хорошо предложить каждому учащемуся изготовить для себя наглядное пособие из листа бумаги по возможности большой плотности. Берутся два небольших листа бумаги A и B (рис. 24а), в которых делаются вырезы mn и m_1n_1, а затем листы A и B вдвигаются по разрезам друг в друга, как это показано на рисунке 24б.

Задачи и вопросы.

1. Найти наибольшее число плоскостей, которые можно провести через 4, 5, 6 и т. д. точек в пространстве.

2. Найти наибольшее число плоскостей, которые можно провести через 5 лучей в пространстве, выходящих из одной точки.

3. В пространстве даны 5 прямых и 5 точек. Найти наибольшее число плоскостей, которые можно провести через них, при условии, чтобы каждая из плоскостей содержала одну из данных прямых и одну из данных точек.

4. Найти наибольшее число прямых, по которым могут пересечься 3 плоскости, 4 плоскости и т. д.

Указания к задачам и вопросам.

1. Наибольшее число плоскостей получится в том случае, если никакие 4 точки не лежат в одной плоскости. Каждые 3 точки, не лежащие на одной прямой, определяют положение только одной плоскости.

Если даны 4 точки, то положение различных плоскостей определяется следующими точками из числа данных:

1) 1, 2 и 3, 2) 1, 2 и 4, 3) 1, 3 и 4, 4) 2, 3 и 4.

Итак, наибольшее число плоскостей, определяемых четырьмя данными точками,— четыре.

Если даны 5 точек, то положение различных плоскостей определяется следующими из данных точек:

1) 1, 2 и 3, 2) 1, 2 и 4, 3) 1, 2 и 5, 4) 1, 3 и 4, 5) 1, 3 и 5,
6) 1, 4 и 5, 7) 2, 3 и 4, 8) 2, 3 и 5, 9) 2, 4 и 5, 10) 3, 4 и 5.

Итак, наибольшее число плоскостей, определяемых пятью данными точками, — десять.

Если даны 6 точек, то положение различных плоскостей определяется следующими точками:

1) 1, 2 и 3, 2) 1, 2 и 4, 3) 1, 2 и 5, 4) 1, 2 и 6, 5) 1, 3 и 4,
6) 1, 3 и 5, 7) 1, 3 и 6, 8) 1, 4 и 5, 9) 1, 4 и 6, 10) 1, 5 и 6,
11) 2, 3 и 4, 12) 2, 3 и 5, 13) 2, 3 и 6, 14) 2, 4 и 5, 15) 2, 4 и 6,
16) 2, 5 и 6, 17) 3, 4 и 5, 18) 3, 4 и 6, 19) 3, 5 и 6, 20) 4, 5 и 6.

Итак, 6 точек пространства, из которых никакие 4 не лежат на одной плоскости, определяют положение двадцати различных плоскостей.

Разбор задачи показывает, что при условии, что никакие 4 точки не лежат на одной плоскости, можно провести:

через 3 точки — 1 плоскость,	через 5 точек — 10 плоскостей
„ 4 „ — 4 плоскости	„ 6 „ — 20 „
	„ 7 „ — 35 „

Полученный результат можно записать следующей таблицей:
Наибольшее число плоскостей имеем:

для 3 точек: 1,	$C_3^3=1$
„ 4 „ $1+3$,	$C_4^3=C_4^1=1$
„ 5 „ $1+3+6$,	$C_5^3=C_5^2=\frac{5\cdot4}{1\cdot2}=10$
„ 6 „ $1+3+6+10$,	$C_6^3=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=20$
„ 7 „ $1+3+6+10+15$.	$C_7^3=\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}=35$ и т. д.

Вывод: наибольшее число плоскостей, которые можно провести через n точек в пространстве, при условии, что никакие 4 из них не лежат в одной плоскости, равно $C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}$.

2. Известно, что каждые два луча, выходящие из одной точки, определяют одну плоскость; следовательно, плоскость образуют каждые два следующих луча

1) 1 и 2, 2) 1 и 3, 3) 1 и 4, 4) 1 и 5, 5) 2 и 3,
6) 2 и 4, 7) 2 и 5, 8) 3 и 4, 9) 3 и 5, 10) 4 и 5.

Разбор задачи показывает, что через 5 лучей, из которых никакие три луча не лежат в одной плоскости, можно провести $1+2+3+4=10$ плоскостей, при этом $10=C_5^2$. Понятно, что через n лучей при заданном условии можно провести C_n^2 плоскостей.

3. Каждая из 5 данных прямых определяет с каждой из данных пяти точек положение одной только плоскости, следовательно, через каждую из данных

прямых и данные 5 точек можно провести 5 плоскостей. Согласно условию задачи даны 5 прямых, а потому через 5 прямых и 5 точек можно провести $5 \times 5 = 25$ плоскостей.

4. Наибольшее число прямых, по которым пересекаются две плоскости,— одна.

Три различные плоскости могут пересечься по трем прямым.

1) 1 с 2, 2) 1 с 3, 3) 2 с 3.

Четыре плоскости могут пересечься по шести прямым:

1) 1 с 2,	3) 1 с 4,	5) 2 с 4,
2) 1 с 3,	4) 2 с 3,	6) 3 с 4.

Пять плоскостей могут пересечься по десяти прямым:

1) 1 с 2,	2) 1 с 3,	3) 1 с 4,	4) 1 с 5,	5) 2 с 3,
6) 2 с 4,	7) 2 с 5,	8) 3 с 4,	9) 3 с 5,	10) 4 с 5.

Понятно, что n плоскостей могут пересечься по $[1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1)]$ прямым или по $\frac{n(n-1)}{2}$ прямым.

Искомый результат получается по формуле: $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$

ГЛАВА III.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ.

§ 9. Введение.

Прежде чем перейти к выяснению свойств прямой, перпендикулярной к плоскости, следует рассмотреть с учащимися различные положения прямой относительно плоскости.

Рассматривается: 1) прямая, имеющая с плоскостью по крайней мере две общие точки; такая прямая совмещается с плоскостью всеми своими точками; 2) прямая, имеющая с плоскостью только одну общую точку; такая прямая пересекает плоскость; и, наконец, 3) прямая, не имеющая на всем своем протяжении с плоскостью ни одной общей точки; такая прямая параллельна плоскости.

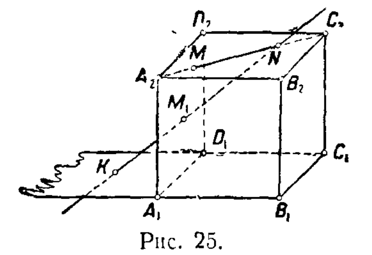


Рис. 25.

Возможность таких положений прямой относительно плоскости надлежит показать учащимся на моделях или на рисунке. Так, на рисунке 25 через две точки M и N плоскости $A_2B_2C_2D_2$ верхней грани куба проведена прямая MN, лежащая всеми своими точками в этой плоскости. Другая прямая, прямая NM_1, имеет с плоскостью $A_2B_2C_2D_2$ верхней грани только одну общую точку N и с плоскостью $A_1D_1D_2A_2$ левой боковой грани куба также только одну общую точку M_1. Прямая NM_1 пересекает первую плоскость в точке N, вторую — в точке M_1; она же пересекает и плоскость $A_1B_1C_1D_1$ нижнего основания куба в точке K.

Точки N, M_1 и K называются основаниями прямой NM_1, или следами ее, на соответствующих плоскостях. Прямая MN не имеет ни одной общей точки с плоскостью $A_1B_1C_1D_1$ нижнего основания куба, она ей параллельна.

Следует использовать геометрический ящик (рис. 4, стр. 9), построить на нем куб со всеми указанными прямыми, пересекающими грани куба.

§ 10. Прямые, перпендикулярные к плоскости.

1. Учащимся указывается, что прямая, пересекая плоскость, может занять относительно плоскости и такое положение, что будет к ней перпендикулярна. После показа на модели или на рисунке прямой, перпендикулярной к плоскости, дается ее определение.

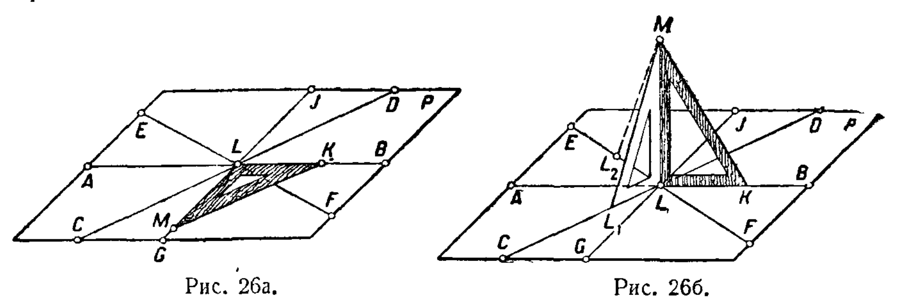


Рис. 26а. Рис. 26б.

Определение. *Перпендикуляром к плоскости называется прямая, пересекающая плоскость и образующая со всеми прямыми на плоскости, проходящими через ее основание, прямые углы.*

Слова „проходящими через ее основание", как потом будет указано, излишни; однако на первых порах не следует их опускать, так как учащимся бывает трудно представить себе, при каких условиях прямая считается перпендикулярной к плоскости.

Теорему „о двух перпендикулярах", которой устанавливается признак перпендикулярности прямой к плоскости, желательно предварить следующим опытом: вычерчивается плоскость P, и на ней проводятся несколько прямых, пересекающихся в точке L (рис. 26а). Если приложить к одной из проведенных прямых, например к прямой AB, чертежный треугольник так, чтобы вершина прямого угла совпала с общей точкой пересечения L и катет LK — с прямой AB, то другой катет ML, находясь в плоскости чертежа, перпендикулярен к прямой AB. Если затем вращать чертежный треугольник вокруг катета LK до тех пор, пока катет ML, выйдя из плоскости P, не образует прямого угла с одной из начерченных прямых, например CD, то катет ML перпендикулярен и ко всем остальным прямым, проходящим через точку L (рис. 26б).

Так как учащиеся знакомы с кубом, то можно использовать куб для проверки вычислением теоремы о двух перпендикулярах. Для этого вычерчивают куб и сечение его плоскостью, проходящей через концы D_2, A_1 и C_1 трех ребер, выходящих из одной и той же вершины, положим, D_1 куба (рис. 27). Полученное сечение $A_1D_2C_1$ — равносторонний треугольник; каждая его сторона равна $a\sqrt{2}$, где a — ребро куба. Высота D_2O треугольника $A_1D_2C_1$ равна $\frac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Соединив точку D_1 с точкой O, получим треугольник D_1D_2O со сторонами $D_1D_2 = a$, $D_1O = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $D_2O = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Но $D_1D_2 \perp D_1C_1$ и $D_1D_2 \perp D_1A_1$, а потому вычислением учащиеся убеждаются и в том, что ребро D_1D_2 перпендикулярно к стороне D_1O, третьей прямой, проведенной в плоскости основания куба.

В самом деле: $\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$ и $\frac{3a^2}{2} = a^2 + \frac{a^2}{2}$. Следовательно, треугольник D_2D_1O — прямоугольный и $D_1D_2 \perp D_1O$.

После этого дается доказательство теоремы о двух перпендикулярах и теоремы: через данную точку к данной плоскости можно провести только один перпендикуляр.

Укажем, как желательно провести доказательство теоремы о двух перпендикулярах.

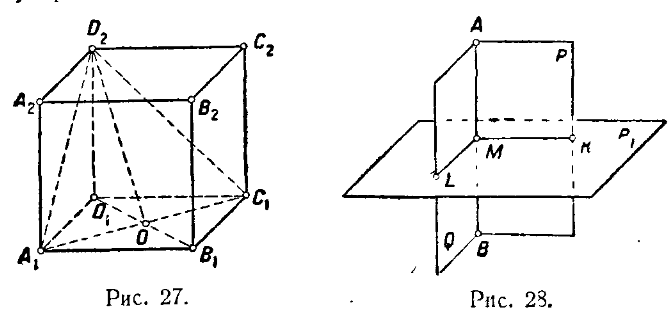


Рис. 27. Рис. 28.

Сперва выполняется построение, соответствующее условиям теоремы. Для этого проводим через произвольную прямую AB две плоскости P и Q (рис. 28), а затем проводим к прямой AB в какой-нибудь ее точке, положим, в точке M, перпендикуляры MK и ML, один в плоскости P, другой в плоскости Q; этими перпендикулярами MK и ML определяется положение некоторой третьей плоскости P_1.

Итак, $MK \perp AB$ и $ML \perp AB$ или $AB \perp MK$ и $AB \perp ML$, т. е. прямая AB перпендикулярна к двум прямым MK и ML, лежащим в плоскости P_1 и проходящим через основание M прямой AB относительно плоскости P_1.

Записываем: Дано: $AM \perp MK$, $AM \perp ML$.
Треб. док.: $AM \perp P_1$ или $AM \perp MN$.

Продолжаем отрезок AM (рис. 29) за точку M по другую сторону плоскости P_1 и откладываем от точки M отрезок $MA_1 = MA$ и проводим в плоскости P_1 через точку M прямую MN. Чтобы доказать, что $AM \perp MN$, нужно убедиться в том, что $\angle AMN = 90°$, а для этого нужно обнаружить равенство смежных углов AMN и A_1MN. Известно, что два угла равны, если они являются или углами при основании равнобедренного треугольника, или углами, образуемыми проведением биссектрисы угла, или соответственными углами двух равных треугольников. Берем на прямой MN произвольную точку N, не совпадающую с M, и соединяем ее с точками A и A_1; получаем два треугольника: $\triangle NMA$ и $\triangle NMA_1$; если доказать, что $\triangle NMA = \triangle NMA_1$, то равенство треугольников позволит сделать заключение о равенстве углов NMA и NMA_1. В треугольниках NMA и NMA_1 сторона MN — общая и $AM = A_1M$ по по-

строению. Для решения вопроса о равенстве треугольников требуется еще или равенство углов между двумя соответственно равными сторонами (СУС), но это требуется доказать, или равенство третьих сторон NA и NA_1 треугольников (ССС; итак, необходимо предварительно доказать равенство сторон NA и NA_1.

Известно, что отрезки равны, если они являются или боковыми сторонами равнобедренного треугольника, или соответственными сторонами двух равных треугольников. Чтобы получить треугольники, в которые входят отрезки NA и NA_1, проводим через точку N прямую KL, пересекающую прямые MK и ML в точках K и L; соединив затем точки K и L с точками A и A_1, получаем треугольники ANK и A_1NK, сторонами которых являются отрезки AN и A_1N. Для доказательства равенства этих треугольников, у которых общая сторона NK, необходимо убедиться сперва в том, равны ли два угла, прилежащие к общей стороне, или стороны AK и A_1K и углы AKN и A_1KN, образуемые двумя равными сторонами. То же относится и к треугольникам ANL и A_1NL. Итак, необходимо доказать, что $AK = A_1K$ и $\angle AKN = \angle A_1KN$ или $AL = A_1L$ и $\angle ALN = \angle A_1LN$.

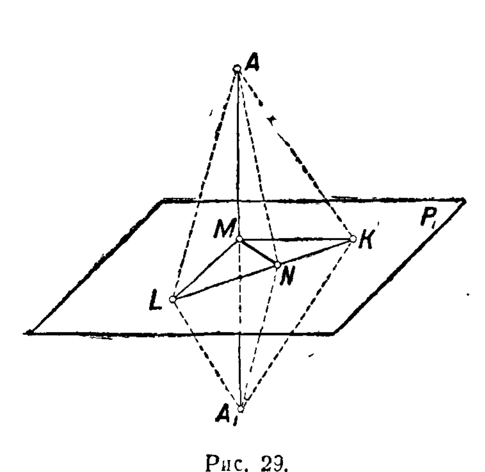


Рис. 29.

Затем рассматриваем прямоугольные треугольники AMK и A_1MK; в них $AM = A_1M$ по построению, а MK — их общая сторона, следовательно, треугольники равны (СУС) и $AK = A_1K$; на том же основании (СУС) равны треугольники AML и A_1ML и $AL = A_1L$.

Необходимо еще доказать, что $\angle AKN = \angle A_1KN$ или $\angle ALN = \angle A_1LN$. Но это — углы треугольников ALK и A_1LK, которые равны по трем соответственно равным сторонам (ССС), а потому эти углы равны.

Итак, $\triangle ANK = \triangle A_1NK$ (СУС), откуда следует, что $AN = A_1N$, а потому $\triangle AMN = \triangle A_1MN$ (ССС) и $\angle AMN = \angle A_1MN = 90°$, что и требовалось доказать.

Можно рассуждать и так: если $AN = A_1N_1$, то $\triangle ANA_1$ — равнобедренный, но NM — медиана, а потому NM и высота, т. е. $NM \perp AA_1$.

Приведенный подробный разбор теоремы, как и всякий такой разбор, позволяет наметить последовательный ход доказательства теоремы; при этом исходным моментом служит то, что требуется доказать. Чтобы лучше оттенить последовательность выполнения построения, а также и самого доказательства, можно рекомендовать вычерчивать равные элементы мелками одного и того же цвета. Так, отрезки AN и A_1N можно провести, положим, красным мелком, отрезки AK и A_1K — желтым мелком и мелками того же цвета отметить углы AKN и A_1KN.

Нужно указать, что цветные мелки можно изготовить и самим; для этого опускают мел в анилиновую краску соответствующего цвета; мел быстро окрашивается; до опускания мелков в краску следует предварительно придать мелкам форму толстого карандаша.

2. После разбора теоремы о двух перпендикулярах можно показать учащимся, как мысленно построить к данной плоскости перпендикуляр, проходящий через точку, лежащую на плоскости или расположенную вне ее.

1) Пусть дана плоскость Q_1 и на ней точка M_1 (рис. 30) и требуется провести через точку M_1 перпендикуляр к плоскости Q_1. Сперва строят построением, данным на рисунке 28 (стр. 25), к произвольной прямой AB перпендикулярную плоскость P_1, а затем накладывают плоскость P_1 на плоскость Q_1 так, чтобы плоскости совпали и точка M совпала с точкой M_1; тогда прямая M_1A — искомый перпендикуляр к данной плоскости Q_1.

2) Если данная точка M_2 лежит вне данной плоскости Q_1, то, совместив плоскость P_1 с плоскостью Q_1, перемещают плоскость P_1 по плоскости Q_1 до тех пор, пока прямая AB не пройдет через точку M_2; тогда AB — искомый перпендикуляр.

Такое построение следует сопоставить с проведением через данную точку перпендикуляра к данной прямой с помощью чертежного треугольника в планиметрии.

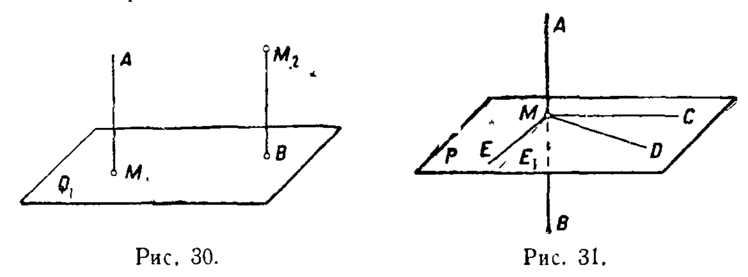


Рис. 30. Рис. 31.

В дальнейшем, после рассмотрения раздела о параллельных прямых в пространстве, указывается другой способ построения прямой, перпендикулярной к плоскости, через точку, лежащую вне плоскости

После того, как доказана теорема, что через данную на плоскости или вне ее точку можно провести к плоскости только один перпендикуляр, следует рассмотреть следствие из теоремы: **все перпендикуляры к данной прямой, проходящие через данную на ней точку, лежат в одной плоскости, перпендикулярной к данной прямой.**

Дано $MC \perp MA$; $MD \perp MA$; $ME \perp MA$; . . . .

Треб. док.: MC, MD, ME ... лежат в плоскости, перпендикулярной к прямой AB.

Доказательство (от противного). Проводим через перпендикуляры MC и MD к прямой AB плоскость P (рис. 31); плоскость $P \perp AB$ на основании теоремы о двух перпендикулярах. Следует доказать, что и перпендикуляр ME к прямой AB лежит в плоскости P. Допустим, что перпендикуляр не лежит в плоскости P; проводим тогда через прямые AB и ME плоскость Q, которая пусть пересечет плоскость P по некоторой прямой ME_1, перпендикулярной к прямой AM. Итак, мы имеем в плоскости Q два перпендикуляра ME и ME_1 к прямой AB, проходящие через точку M прямой AB; но это невозможно; следовательно, допущение, что перпендикуляр ME не лежит в плоскости P, неверно; перпендикуляр ME лежит в плоскости P.

Весьма важно указать учащимся, что если отложить на перпендикуляре к плоскости, считая от его основания, по обе стороны от плоскости равные отрезки, то любая точка плоскости отстоит от концов отрезка, перпендикулярного к плоскости, на равные расстояния. Отсюда следует:

Геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от двух данных точек, есть плоскость, перпендикулярная к отрезку, концами которого служат данные две точки, и проходящая через его середину.

Действительно, если точка M — середина отрезка AB, где A и B — данные точки, и P — плоскость, которая перпендикулярна к отрезку AB и проходит через его середину, через точку M, то любая точка K плоскости P (рис. 32) отстоит от концов A и B отрезка на равные расстояния, так как $\triangle AMK = \triangle BMK$ (СУС). Любая же точка K_1, не лежащая в плоскости P, не отстоит на равные расстояния от концов A и B отрезка AB. В самом деле, если провести через отрезок AB и точку K_1 плоскость Q, которая пересечет плоскость P по прямой MN, то, как известно, $K_1A \neq K_1B$.

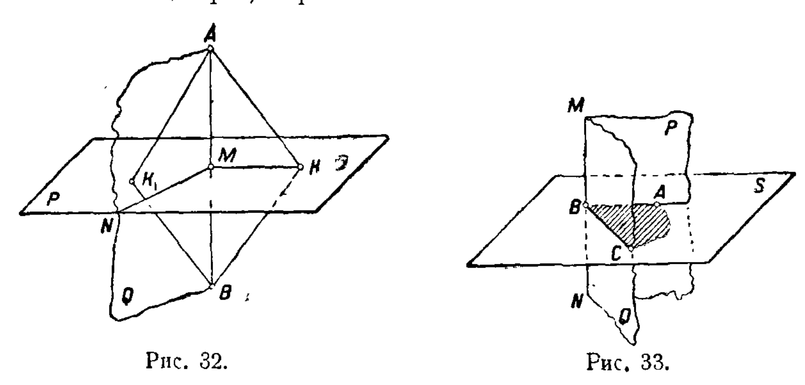


Рис. 32. Рис. 33.

Точки A и B расположены симметрично относительно плоскости P, и плоскость P является плоскостью симметрии точек A и B.

3. Для показа учащимся, как вычерчивается изображение плоскости перпендикулярной к данной прямой и проходящей через данную точку следует рассмотреть следующую задачу.

Задача. Дана прямая MN и вне ее точка A. Провести через точку A плоскость, перпендикулярную к данной прямой MN.

Проводим через данную точку A и данную прямую MN плоскость P и через прямую MN другую произвольную плоскость Q (рис. 33). Из точки A проводим затем в плоскости P перпендикуляр AB к прямой MN и в плоскости Q через точку B прямую BC, перпендикулярную к прямой MN. Так построенные две пересекающиеся прямые AB и BC однозначно определяют положение третьей плоскости S, которая перпендикулярна к прямой MN, так как $MN \perp BA$ и $MN \perp BC$, а потому, на основании теоремы о двух перпендикулярах, прямая $MN \perp S$ или плоскость $S \perp MN$.

В том случае, когда точка A, через которую надо провести плоскость, перпендикулярную к данной прямой MN, лежит на этой же прямой, проводят через прямую MN две произвольные плоскости P и Q и в каждой

из них проводят через данную на прямой MN точку A по перпендикуляру к MN; эти перпендикуляры определяют положение искомой плоскости.

§ 11. Прямые, перпендикулярные и наклонные к плоскости.

1. В связи с проработкой раздела о перпендикулярах и наклонных учащимся должно быть дано четкое понятие о перпендикуляре и наклонной, а также о проекции точки и прямой на плоскость.

Указывается, что 1) *проекция точки A на плоскость P есть основание B перпендикуляра AB, проведенного из точки A к плоскости P;* 2) *проекция отрезка AB на плоскость P есть отрезок A_1B_1, концами которого служат проекции A_1 и B_1 концов A и B данного отрезка AB на плоскость P.* В том случае, когда отрезок AB перпендикулярен к плоскости P, проекция его концов A и B — точки A_1 и B_1 — сливаются, и проекция такого отрезка — точка B_1.

Рассматривается теорема: **если из одной и той же точки вне данной плоскости проведены к данной плоскости перпендикуляр и наклонные, то 1) перпендикуляр короче каждой из наклонных и 2) из двух наклонных та больше, проекция которой больше.**

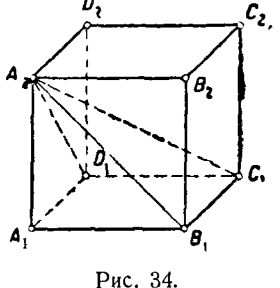


Рис. 34.

Необходимо рассмотреть и обратные теоремы.

Нелишне указать учащимся на двоякое значение, которое придают понятиям „перпендикуляр“ и „наклонная“, если они проведены из внешней точки к данной плоскости.

Так, перпендикуляр и наклонная рассматриваются или как прямые, безгранично простирающиеся в обе стороны, или как отрезки, концами которых служат данная вне плоскости точка и соответственно основание перпендикуляра или наклонной на плоскости.

Ясно, что в приведенных выше теоремах перпендикуляр и наклонные рассматриваются как отрезки.

Учащимся также указывается, что за расстояние точки от плоскости принимают кратчайшее расстояние точки от плоскости, а именно — длину перпендикуляра, проведенного из данной точки на данную плоскость. Из этого следует, что **кратчайшее расстояние точки от данной плоскости равно длине отрезка, концами которого служат данная точка и ее проекция на данную плоскость.**

2. Особое внимание должно быть уделено теореме о трех перпендикулярах и теореме, ей обратной. Теорема эта имеет существенно важное значение для чтения чертежа и выполнения построений. При разборе теоремы следует использовать геометрический ящик. Применение теоремы следует показать на решении какой-либо задачи или на рассмотрении взаимного расположения отдельных прямых в каком-либо теле.

Пусть дан куб $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ с ребром a (рис. 34), и пусть вершина A_2 куба соединена с его вершинами B_1, C_1 и D_1.

Если выделить из данного куба тело, ограниченное основанием данного куба — квадратом $A_1B_1C_1D_1$ — и треугольниками $A_2A_1B_1$, $A_2B_1C_1$,

$A_2C_1D_1$ и $A_2D_1A_1$, то получится четырехугольная пирамида; пирамиду эту следует вычертить отдельно (рис. 35). Следует провести с учащимися разбор тела, полученного из куба указанным выше построением. Так, одна его грань — четырехугольник, а другие четыре его грани — треугольники, основаниями которых служат стороны четырехугольника; вершины треугольников сходятся в одной точке — точке A_2, треугольники имеют общие стороны, которые являются боковыми ребрами тела. Такой разбор позволит учащимся выяснить характерные признаки четырехугольной пирамиды и дать самостоятельно ее определение.

Полученную пирамиду можно использовать для показа, как вычислить длину ребер A_2B_1, A_2C_1 и A_2D_1 этой пирамиды.

Вычисление: 1) стороны основания $A_1B_1C_1D_1$ пирамиды — ребра куба, и каждая из них равна a; 2) ребро A_2A_1 пирамиды — ребро куба и равно a; 3) ребра A_2B_1 и A_2D_1 пирамиды — диагонали боковых граней куба и каждое из них равно $a\sqrt{2}$; 4) ребро A_2C_1 пирамиды — отрезок, концы которого — вершины куба, не лежащие на одной грани; длина отрезка A_2C_1 находится из треугольника $A_2A_1C_1$, в котором катет $A_2A_1 = a$, а катет $A_1C_1 = a\sqrt{2}$, и следовательно $A_2C_1 = \sqrt{2a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

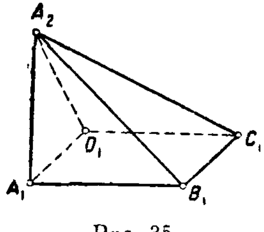


Рис. 35.

Необходимо затем рассмотреть, какие по форме треугольники представляют собою боковые грани пирамиды.

1) $\triangle A_2A_1B_1$ и $\triangle A_2A_1D_1$ — равные прямоугольные и притом равнобедренные треугольники (ССС).

2) $\triangle A_2B_1C_1$ и $\triangle A_2D_1C_1$ — равные треугольники (ССС).

Чтобы доказать, что $\triangle A_2B_1C_1$ — прямоугольный, надлежит продолжить разбор взаимного положения ребер пирамиды. Понятно, что ребро A_2A_1 перпендикулярно к плоскости основания пирамиды, ребро A_2B_1 — наклонная, ребро A_1B_1 — проекция наклонной A_2B_1 и ребро $B_1C_1 \perp A_1B_1$, а отсюда следует на основании теоремы о трех перпендикулярах, что ребро $B_1C_1 \perp B_1A_1$, и, следовательно, $\triangle A_2B_1C_1$ — прямоугольный.

Аналогичными рассуждениями учащиеся должны убедиться, что и треугольник $A_2D_1C_1$ — прямоугольный; на самом деле, $D_1C_1 \perp D_1A_1$, а потому $D_1C_1 \perp D_1A_2$. Что треугольник $A_2D_1C_1$ — прямоугольный, учащиеся могли бы заключить, приняв во внимание, что он равен прямоугольному треугольнику $A_2B_1C_1$ (ССС).

Пирамида $A_2A_1B_1C_1D_1$, полученная определенным построением из куба, позволяет решить задачу на вычисление диагонали A_2C_1 куба. Для этой цели используется треугольник $A_2B_1C_1$ или треугольник $A_2D_1C_1$, одной из сторон которых служит диагональ A_2C_1 куба. На самом деле, $A_2B_1 = a\sqrt{2}$ и $B_1C_1 = a$, следовательно, искомая диагональ куба $A_2C_1 = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Диагональ A_2C_1 куба, как уже было показано, можно найти и из прямоугольного треугольника $A_2A_1C_1$, если провести диагональ основания пирамиды $A_1C_1 = a\sqrt{2}$. Последнее построение можно использовать для доказательства, что $\triangle A_2A_1C_1 = \triangle A_2B_1C_1 = \triangle A_2D_1C_1$.

Можно предложить учащимся убедиться и путем вычисления, что треугольник $A_2D_1C_1$ — прямоугольный: сравнивая квадрат диагонали A_2C, куба — большей стороны треугольника $A_2D_1C_1$ — с суммой квадратов двух других его сторон, A_2D_1 и D_1C_1. Так поступают, как известно, в тех случаях, когда желают узнать, будет ли данный своими сторонами треугольник остроугольный, прямоугольный или тупоугольный.

Полезно сопоставить величины: $a\sqrt{2}$ (диагональ квадрата со стороною a) и $a\sqrt{3}$ (диагональ куба с ребром a) и отметить, что квадрат — фигура двух измерений, куб — фигура трех измерений.

3. Необходимо указать, что в целях большей конкретизации рассматриваемых геометрических фактов и показа их существования в окружающей нас действительности полезно использовать уже в начале курса стереометрии знакомые учащимся тела, хотя всестороннее и подробное их изучение, образование и определение, их свойства и признаки будут изучаться учащимися лишь в дальнейшем, после того как они ознакомятся со всевозможными положениями прямых и плоскостей в пространстве. На первых порах следует ограничиться кубом, прямой призмой и простейшими телами, получаемыми проведением сечений в кубе. Понятно, что, пользуясь кубом, необходимо показать учащимся и его построение. Для этой цели преподаватель вычерчивает на доске куб и на готовом рисунке показывает, какие линии куба сохраняют на рисунке свою действительную величину, взятую в определенном масштабе, какие линии сокращаются вдвое, и отмечает, что прямые углы изображаются либо в натуре, либо острыми углами в 45°, либо тупыми углами в 135°.

§ 12. Угол прямой с плоскостью.

1. Прежде чем перейти к третьей основной теореме стереометрии, к теореме о наименьшем угле, образованном плоскостью с пересекающей ее прямой, следует предварительно рассмотреть с учащимися вопрос о перпендикуляре и наклонной, проходящих через одну и ту же точку плоскости.

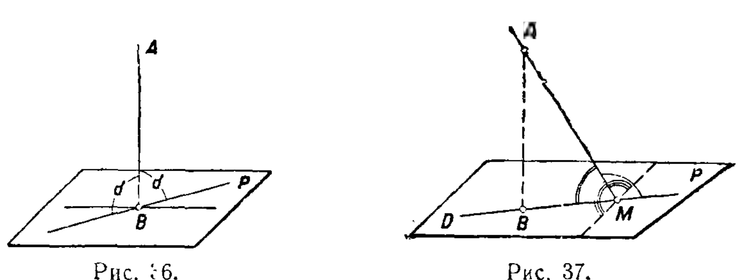


Рис. 36. Рис. 37.

Во первых, следует указать учащимся, что перпендикуляр к плоскости образует с любой прямой, проходящей на плоскости через его основание, два равных смежных угла, т. е. два прямых угла (рис. 36), и, во-вторых, что наклонная образует с любой прямой, проходящей на плоскости через ее основание, два неравных смежных угла, один острый, другой тупой, за исключением того случая, когда прямая на плоскости перпендикулярна к проекции наклонной (рис. 37).

Следует заострить внимание учащихся на различии величины углов, образуемых наклонной с различными прямыми на плоскости, проходящими через основание наклонной. Если наклонная образует с какой-либо прямой на плоскости два неравных угла, один острый угол, другой — тупой, то острый угол меньше тупого. Это понятно и не вызывает никаких сомнений. Другое дело, если приходится сравнивать два острых угла, образуемых наклонной с двумя различными прямыми, проходящими на плоскости через основание наклонной; возникает вопрос, какой же из двух или нескольких острых углов меньше остальных, при каком условии острый угол наименьший. Нужно отметить, что сугубо важно четко провести с учащимися исследование этого вопроса, приводящего к теореме: **наименьший острый угол, образуемый наклонной к плоскости и прямой, проходящей на плоскости через основание наклонной, есть угол, образуемый наклонной с ее проекцией на плоскости.**

Пусть дана плоскость P и наклонная AB. Через основание B наклонной AB следует провести на плоскости ряд прямых и указать, что среди прямых, которые можно провести через основание наклонной AB, находится и прямая, являющаяся проекцией наклонной AB на плоскость P; затем следует рассмотреть углы, образуемые наклонной с прямыми, проходящими на плоскости через ее основание, обозначив их различными значками — дугами, чтобы отличить их друг от друга; понятно, что полученные таким построением острые углы различны по своей величине.

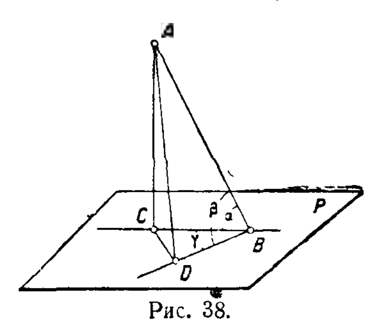


Рис. 38.

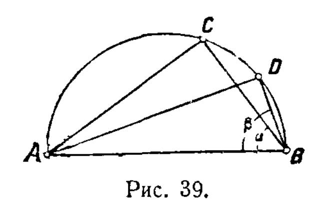


Рис. 39.

Ставится вопрос, какой же угол из всех углов, образуемых наклонной и прямыми, проходящими через ее основание, наименьший. Чтобы ответить на поставленный вопрос, строится угол, образуемый наклонной и ее проекцией на плоскость P, с которым и сравнивают другие углы.

Пусть прямая $AC \perp P$ (рис. 38), тогда BC — проекция наклонной AB и $\angle ABC = \alpha$ — угол, образуемый наклонной и ее проекцией на плоскость. Затем следует провести на плоскости P произвольную прямую BD через основание B наклонной AB и сравнить величину острого угла β, образуемого наклонной AB с прямой BD на плоскости P, с углом α. Указывается, что случай, когда прямая, проведенная через основание B наклонной, перпендикулярна к проекции BC, исключается, так как в этом случае она образует с наклонной не острый, а прямой угол, что вытекает из теоремы о трех перпендикулярах. Из точки C проводится затем на прямую BD перпендикуляр CD, и точка D соединяется с точкой A, тогда $BD \perp AD$ и, следовательно, треугольник ADB — прямоугольный, его $\angle ADB = 90°$; отмечается при этом, что $AC < AD$.

После этого следует совместить плоскость прямоугольного треугольника ADB с плоскостью треугольника ACB поворотом вокруг общей

их гипотенузы AB (рис. 39). Приняв наклонную AB за диаметр, строят окружность; вершины C и D прямых углов треугольников ACB и ADB лежат на окружности, при этом хорда $AC < AD$, так как AC — перпендикуляр, а AD — наклонная, а потому и $\smile AC < \smile AD$, откуда следует, что $\angle \alpha < \angle \beta$, так как из двух углов, вписанных в одну и ту же окружность, тот меньше, дуга которого, заключенная между двумя его сторонами, меньше. Итак, из всех острых углов, образуемых наклонной с прямыми, проходящими на плоскости через ее основание, угол, образуемый наклонной и ее проекцией на ту же плоскость, — наименьший. Этот наименьший угол принимается за угол прямой с плоскостью.

2. Весьма полезно рассмотреть с учащимися также и вопрос о величине углов, *образуемых различной длины наклонными*, проведенными из одной точки вне плоскости к последней, чтобы подчеркнуть, что из двух наклонных, проведенных из одной и той же точки к плоскости, та наклонная образует с плоскостью меньший угол, которая больше. Это положение можно сформулировать и так: из двух разных по длине наклонных, проведенных из внешней точки к данной плоскости, та наклонная образует с плоскостью меньший угол, проекция которой больше. Для доказательства данного предложения достаточно расположить обе наклонные в одной плоскости и сравнить между собою углы, образуемые ими с плоскостью; эти углы являются углами треугольника, составленного наклонными и их проекциями, при этом один из рассматриваемых углов — внешний, другой — внутренний; последний же, как известно, меньше внешнего.

3. Иное доказательство рассмотренного выше предложения об угле прямой с плоскостью основано на применении тригонометрии; соответствующее доказательство приведено в стабильном учебнике.

Следует иметь в виду, что весьма целесообразно при решении отдельных вопросов стереометрии использовать известные учащимся из тригонометрии зависимости между элементами треугольников; этим значительно облегчается решение задач, в которых требуется найти величину угла, образуемого отдельными линейными элементами тела; это и необходимо, так как без тригонометрии нельзя вычислить величину углов, если искомый угол не является углом в 30°, 45°, 60°, 120°, 135° и т. д.

4. Особое внимание должно быть уделено при разборе трех основных теорем — теоремы о двух перпендикулярах, о трех перпендикулярах и о наименьшем угле между прямой и плоскостью,— решению примеров и задач как на вычисление, так и на построение, в которых эти теоремы находят свое приложение.

5. Тщательно исполненные рисунки — изображения заданных в условиях задач фигур — и параллельно с этим построение самих фигур на геометрическом ящике как нельзя лучше содействуют развитию пространственных представлений учащихся. Кроме того, должны быть использованы в полной мере разных цветов палочки при построении фигур и разноцветные мелки или карандаши при изображении фигур на доске или на бумаге. Необходимо всегда внимательно проверять работы учащихся с первых же шагов прохождения курса стереометрии, отмечать все недочеты, выявляющиеся в части выполнения или оформления задания; всякий недосмотр на этой ступени плохо отзывается на дальнейшей работе. Небрежное, неаккуратное отношение к делу должно быть искоренено в самом начале.

Наглядным пособием могут служить также и стереограммы, рассматриваемые в стереоскоп, и анаглифы рисунки.

Если на такую работу и приходится затрачивать в начале курса больше времени, то в дальнейшем работа пойдет во много раз скорее, ибо у учащихся уже будут прочные навыки.

Задачи и вопросы.

1. На сколько областей делится пространство одной плоскостью? двумя пересекающимися плоскостями?

2. Найти геометрическое место точек, равно удаленных от трех данных точек в пространстве, не лежащих на одной прямой.

3. На плоскости P две прямые AB и CD пересекают я в некоторой точке M; на этих прямых взяты отрезки $MA = MB$ и $MC = MD$. Точка N, взятая вне плоскости, соединена с точками A и B, C и D данных прям х. Доказать, что $NM \perp P$, если известно, что $NA = NB$ и $NC = ND$.

4. Провести на данной плоскости прямую, отстоящую от двух данных точек вне данной плоскости на одно и то же расстояние.

5. Вне плоскости правильного треугольника ABC дана точка M, причем $MA = MB = MC = a$ и точка M отстоит от плоскости треугольника ABC на расстояние h. Вычислить сторону треугольника.

6. Гипотенуза прямоугольного треугольника $c = 12$ *м*. На каком расстоянии от плоскости находится точка M, удаленная от всех вершин треугольника на одно и то же расстояние $m = 10$ *м*?

7. Стороны треугольника ABC соответственно равны $a = 5$, $b = 6$ и $c = 9$ *см*. На каком расстоянии от плоскости треугольника следует взять точку, чтобы она отстояла от всех трех вершин треугольника на расстояние $m = 5$ *см*?

8. К плоскости прямоугольника $ABCD$ через его вершину D проведен перпендикуляр DK, конец которого K отстоит от остальных вершин прямоугольника на расстояния $a = 6,0$, $b = 7,0$ и $c = 9,0$ *см*. Найти длину DK.

9. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны $AC = b = 16$ *см* и $BC = a = 9$ *см*. К плоскости треугольника в середине его гипотенузы проведен перпендикуляр $h = 6$ *см*. Найти расстояния концов перпендикуляра от катетов.

10. Через гипотенузу данного прямоугольного треугольника провести плоскость на расстоянии $a = 3$ *см* от вершины прямого угла. Вычислить площадь треугольника, если известно, что каждый катет больше своей проекции вдвое.

11. (Устно.) На плоскости P дана точка A. Наклонная $AB = 2a$ образует с плоскостью P угол α; проекция AB_1 наклонной равна a. Найти угол α.

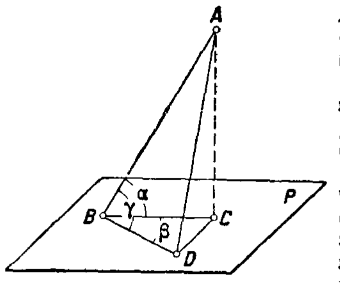


Рис. 40.

12. Из точки A вне плоскости P проведены две равные наклонные AB и AC. Отрезок BC, соединяющий на плоскости P концы B и C наклонных, равен $a = 10$ *см*. Угол, образуемый наклонной AB и BC, равен $\alpha = 60°$; угол, образуемый BC с проекцией наклонной AC, равен $\beta = 30°$. Найти расстояние от точки A до плоскости.

13. Даны наклонная AB и ее проекция BC; через основание B наклонной проведена на плоскости прямая BD и $CD \perp BD$ (рис. 40). Доказать, что $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos\gamma$. Пояснить, как использовать эту зависимость, чтобы показать, что из всех острых углов, образуемых наклонной с плоскостью, наименьший тот, который образован прямой и ее проекцией.

14. Найти угол γ (вопрос 13), если известно: 1) что $\alpha = \beta = 45°$ и 2) что $\alpha = \beta = 90°$. Как объяснить последний случай?

15. Стороны треугольника ABC равны $a = 13$ *см*, $b = 14$ *см* и $c = 15$ *см* (геронов треугольник). К плоскости этого треугольника через центр O описанной окружности проведен перпендикуляр $OK = m = 13$ *см*. Найти угол наклона прямых KA, KB и KC к плоскости треугольника.

1. Одной плоскостью пространство делится на две области, двумя пересекающимися плоскостями — на четыре области.

2. Три данные точки A, B и C следует принять за вершины некоторого треугольника (рис. 41).

Точка, равно удаленная от вершины треугольника и, следовательно, от данных точек, есть центр O окружности, проходящей через вершины A, B и C треугольника, при этом $OA = OB = OC$ — радиус этой окружности, а потому перпендикуляр, проведенный к плоскости треугольника через точку O, является искомым геометрическим местом. В самом деле, если соединить произвольную точку K_1 этого перпендикуляра с точками A, B и C, то получившиеся наклонные равны, $K_1A = K_1B = K_1C$, так как равны их проекции, которые являются радиусами окружности, проходящей через данные точки A, B и C.

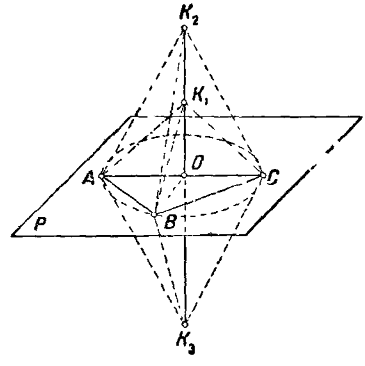


Рис. 41.

Учитывая, что на данной ступени пространственное представление учащихся еще недостаточно развито, целесообразно сделать соответствующее построение на геометрическом ящике, пользуясь палочками одного цвета—для построения наклонных, выходящих из одной какой-либо произвольной точки перпендикуляра, палочками другого цвета для построения наклонных, выходящих из другой точки перпендикуляра, и т. д. Давая рисунок на доске или бумаге, не плохо пользоваться цветными мелками или цветными карандашами. На рисунке 41 наклонные, проведенные из разных точек, должны быть даны разными пунктирами.

3. Проводим на плоскости P две пересекающиеся в точке M прямые AB и CD (рис. 42) и откладываем на них от точки M отрезок $MA = MB$ и отрезок $MC = MD$; из точки N проводим наклонные NA NB, пользуясь, положим, красным мелком, и наклонные $NC = ND$ — желтым мелком, а затем соединяем точку M с точкой N зеленым мелком; искомый отрезок MN отмечаем более жирной чертой. Остается доказать, что $NM \perp P$.

Три точки D, N и C однозначно определяют плоскость $\triangle DNC$; этот треугольник — равнобедренный, NM — его медиана, так как $MD = MC$, а следовательно, и его высота, т. е. $NM \perp DC$.

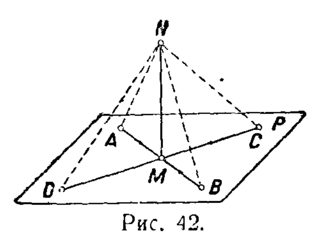


Рис. 42.

Так же находим, что $NM \perp AB$, а потому, на основании теоремы о двух перпендикулярах, $NM \perp P$.

4. Строим плоскость P и отмечаем вне ее две произвольные точки A и B (рис. 43). Известно, что геометрическое место точек, равно удаленных от двух точек A и B, есть плоскость Q, которая перпендикулярна к отрезку AB и проходит через его середину M. Если построим эту плоскость Q, то она пересечет плоскость P по некоторой прямой KL, которая и будет искомой, так как все ее точки, находясь на плоскости P, одинаково удалены от точек A и B.

На рис. 43 данные точки A и B расположены по одну сторону от плоскости P. Аналогичное решение имеет место, если точки A и B расположить по разные стороны от плоскости P; следует предложить учащимся дать рисунок для этого случая.

Следует рассмотреть и тот случай, когда данные точки A и B лежат на одном перпендикуляре к плоскости P, понятно, что при заданном условии задача не имеет решений.

Наконец, должно остановиться на случае, когда данная плоскость P проходит через середину M отрезка AB, и, следовательно, точка M лежит на плоскости P. Если при этом отрезок AB не перпендикулярен к плоскости P, то искомая прямая лежит в плоскости P и является линией пересечения плоскостей P и Q;

если же отрезок $AB \perp P$, то любая прямая на плоскости P, проходящая через точку M — середину отрезка AB, удовлетворяет условию задачи, так как плоскости P и Q совпадают.

5. На плоскости P вычерчивается правильный треугольник ABC (рис. 44) по правилам кабинетной проекции, при этом треугольник располагается на плоскости так, чтобы высота его AD, она же и медиана, была параллельна плоскости чертежа. Согласно условию задачи, внешняя точка M одинаково удалена от вершин A, B и C, а потому она должна лежать на перпендикуляре к плоскости P, проходящем через центр O описанной около треугольника ABC окружности (см. задачу 2). Этот центр O лежит, как известно, на расстоянии DO от стороны BC, равном $\frac{1}{3}$ высоты AD треугольника ABC. Найдя положение центра O, проводят $OM \perp P$ и откладывают $OM = h$, и тогда $MA = MB = MC$ как наклонные, имеющие равные проекции, так как $OA = OB = OC = R$. Затем находят сторону треугольника ABC. Обозначив сторону треугольника ABC через x, вычисляют сперва радиус описанной окружности; $OC = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$, так как радиус описанной окружности равен $\frac{2}{3}$ высоты правильного треугольника; кроме того, находим из прямоугольного треугольника MOC, что $\left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - h^2$, или $x^2 = 3(a^2 - h^2)$, откуда $x = \sqrt{3(a+h)(a-h)}$.

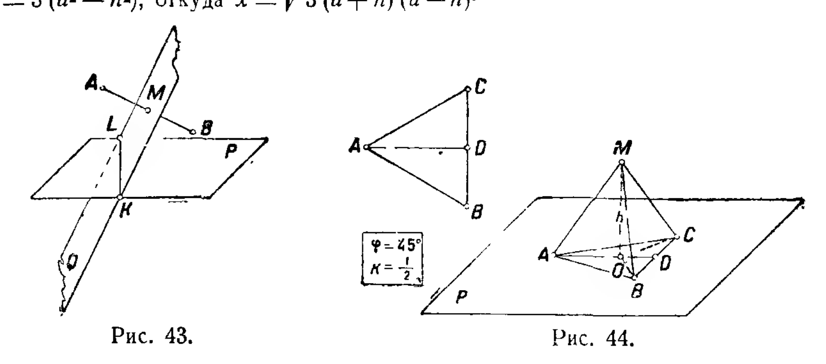


Рис. 43. Рис. 44.

Следует обратить внимание учащихся на положение высоты AD треугольника ABC на рисунке. Выполненное выше построение позволяет получить в неискаженном виде высоту $h_1 = AD$ основания; радиус $R = OA$ описанной окружности и радиус $r = OD$ вписанной окружности, причем $R = 2r$ и $R + r = h_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; угол, образуемый наклонною MA с плоскостью треугольника ABC, и, наконец, высоту $h = MO$ пирамиды $MABC$.

Подробный разбор данного рисунка весьма полезен для уточнения последующих построений, особенно, если иметь в виду построение пирамиды и ее изображения.

Разобранная задача решена в общем виде. Необходимо отметить, что следует приучать учащихся решать любую задачу в общем виде и, решив ее, подставлять затем в полученную формулу заданные числовые значения отдельных величин. Указываем, что при решении задачи в общем виде сохраняется размерность алгебраических выражений, имеется возможность быстрой проверки получаемых шаг за шагом результатов отдельных операций, ибо все получаемые равенства должны быть однородны, т. е. быть одного измерения.

6. Приступая к решению задачи, следует прежде всего начертить плоскость P — прямоугольник, изображаемый в виде параллелограма с острым углом $\varphi = 45°$, а затем построить на плоскости P прямоугольный треугольник ABC, как показано на рисунке 45а, где катеты CA и CB параллельны сторонам построенного прямоугольника. Ясно, что $\angle C = 90°$, ибо он равен соответствующему углу прямоугольника, т. е. прямому углу. Целесообразно и иначе расположить на плоскости P

изображение прямоугольного треугольника, примерно, как показано на рисунке 45б, и сравнить дальнейшее построение с первым, чтобы убедиться в том, что первое изображение заданного геометрического образа по сравнению с другими выделяется на чертеже более рельефно.

Ход рассуждений аналогичен рассуждениям предыдущей задачи. Точка M, отстоящая от вершин A, B и C треугольника ABC на одинаковое расстояние, должна лежать на перпендикуляре к плоскости треугольника, проходящем через центр описанной окружности; центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы, следовательно, точка M лежит на перпендикуляре OM к плоскости P (на чертеже $OM \perp BC$); согласно построению и условию, $MA = MB = MC = m$; треугольник AMB — равнобедренный. Из треугольника AOM, в котором $MA = m$ и $OA = \frac{c}{2}$, находим катет $OM = x$:

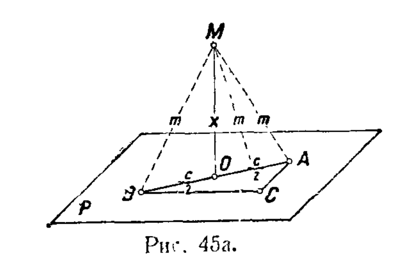


Рис. 45а.

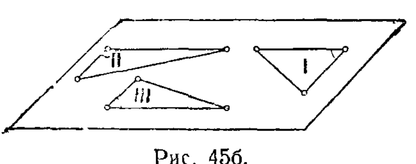


Рис. 45б.

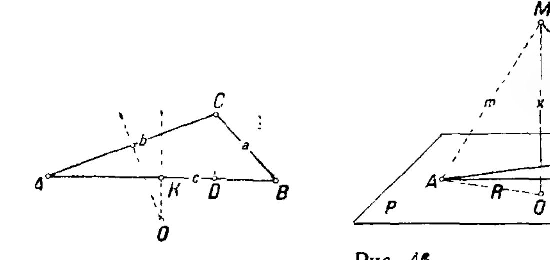
$$x = \sqrt{m^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4m^2 - c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2m + c)(2m - c)}.$$

Подставляя вместо m и c заданные их числовые значения, получаем:

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{(20 + 12)(20 - 12)} = \frac{1}{2}\sqrt{32 \cdot 8} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 8 \ (м).$$

Если класс плохо разбирается в построениях, следует предварительно все построения выполнить на геометрическом ящике, и только после всестороннего анализа построенного образа перейти к построению его изображения на доске и в тетради и, наконец, к решению задачи.

7. Ошибка, которую обычно допускают учащиеся при решении этой задачи, состоит в том, что они, не проанализировав условий задачи, выполняют построение, проводя перпендикуляр к плоскости треугольника в точке, лежащей внутри



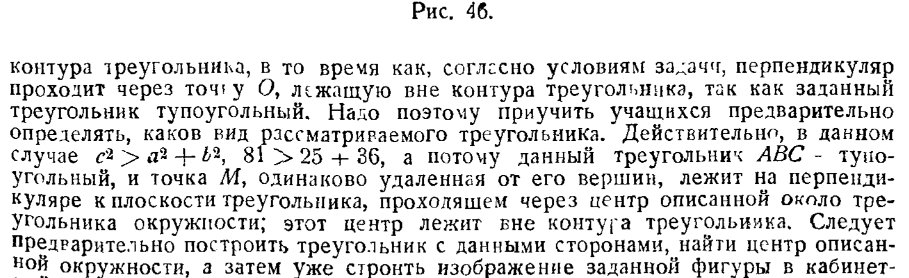


Рис. 46.

контура треугольника, в то время как, согласно условиям задачи, перпендикуляр проходит через точку O, лежащую вне контура треугольника, так как заданный треугольник тупоугольный. Надо поэтому приучить учащихся предварительно определять, каков вид рассматриваемого треугольника. Действительно, в данном случае $c^2 > a^2 + b^2$, $81 > 25 + 36$, а потому данный треугольник ABC - тупоугольный, и точка M, одинаково удаленная от его вершин, лежит на перпендикуляре к плоскости треугольника, проходящем через центр описанной около треугольника окружности; этот центр лежит вне контура треугольника. Следует предварительно построить треугольник с данными сторонами, найти центр описанной окружности, а затем уже строить изображение заданной фигуры в кабинетной проекции.

Обозначив искомое расстояние MO (рис. 46) через x, находим из прямоугольного треугольника MOA, в котором катет $AO = R$ — радиусу описанной окружности, а гипотенуза $MA = m$, что $x = \sqrt{m^2 - R^2}$; но

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

а потому

$$x = \sqrt{m^2 - \frac{a^2 b^2 c^2}{16S^2}} = \sqrt{\left(m + \frac{abc}{4S}\right)\left(m - \frac{abc}{4S}\right)}.$$

Для получения числового значения x имеем: $m = 5$, $a = 5$, $b = 6$ и $c = 9$. Сперва находим R, а затем x.

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{5\cdot6\cdot9}{4\sqrt{10\cdot1\cdot4\cdot5}} = \frac{5\cdot6\cdot9}{4\cdot5\cdot2\sqrt{2}} = \frac{27}{4\sqrt{2}} = \frac{27\sqrt{2}}{8},$$

$$x = \sqrt{\left(5 + \frac{27\sqrt{2}}{8}\right)\left(5 - \frac{27\sqrt{2}}{8}\right)} = \frac{1}{8}\sqrt{(40 + 27\sqrt{2})(40 - 27\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt{1600 - 1458} = \frac{1}{8}\sqrt{142} \approx 1,5.$$

Итак,

$$MO \approx 1,5\ см.$$

8. Цель данной задачи — научить учащихся правильно отмечать, согласно условию задачи, длину отдельных линейных элементов рассматриваемой фигуры; так, в данной задаче учащиеся должны выяснить, которая из получаемых наклонных, KA, KB или KC, длиннее, а также — которая из них короче других, если известно, что $a < b < c$.

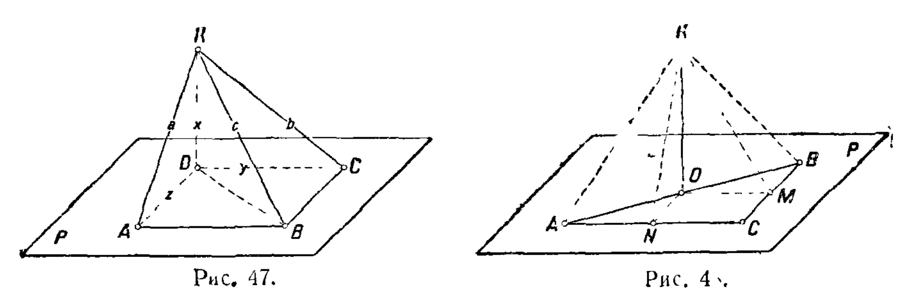


Рис. 47. Рис. 48.

Построив прямоугольник $ABCD$ и в точке D перпендикуляр DK к плоскости ACD (рис. 47), учащиеся должны отметить $KA = a$, $KC = b$ и $KB = c$, ибо $DA < DC < DB$.

Для нахождения длины $DK = x$ имеем, обозначив стороны прямоугольника через y и z, где $z < y$:

из $\triangle KDA$: $x^2 = a^2 - z^2$;
из $\triangle KDC$: $x^2 = b^2 - y^2$;
из $\triangle KDB$: $x^2 = c^2 - z^2 - y^2$.

Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными. Складывая почленно первые два уравнения и вычитая из их суммы почленно третье, находим

$$x^2 = a^2 + b^2 - c^2,$$

откуда $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$; подстановка числовых значений a, b и c дает затем:

$$x = \sqrt{6^2 + 7^2 - 9^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Итак, $DK = 2$ *см*. В данном случае взято арифметическое значение корня: *однако и отрицательный корень может быть истолкован:* это отрезок DK_1,

направление которого противоположно направлению отрезка DK; ясно, что отрезок DK_1 расположен по другую сторону плоскости P.

9. Построение проводится аналогично построению, данному в задаче 6.

Расстояния от конца O перпендикуляра OK до катета BC и катета AC соответственно равны $OM=\frac{AC}{2}=\frac{b}{2}$ и $ON=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}$ (рис. 48). Чтобы найти расстояния другого конца K перпендикуляра OK от катета BC и от катета AC, соединяем точку K с точками M и N, и тогда $KM \perp BC$ и $KN \perp AC$, на основании теоремы о трех перпендикулярах; отрезки KM и KN — искомые расстояния. Из прямоугольных треугольников KOM и KON находим:

$$KM=\sqrt{h^2+\frac{b^2}{4}} \quad \text{и} \quad KN=\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}.$$

Подставляя данные числовые значения, получаем:

$$OM=\frac{16}{2}=8 \text{ см}; \quad ON=\frac{9}{2}=4{,}5 \text{ см};$$

$$KM=\sqrt{6^2+8^2}=10 \text{ см}; \quad KN=\sqrt{6^2+4{,}5^2}=7{,}5 \text{ см}.$$

При вычерчивании фигуры целесообразно выделить отрезки OM и ON одним каким-либо цветом, отрезки KM и KN — другим цветом или же разными пунктирными линиями.

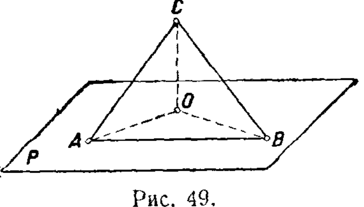


Рис. 49.

10. Построение изображения требуемой фигуры представляет в данном случае некоторые затруднения, а потому целесообразно сначала *построить фигуру на геометрическом* ящике, чтобы разобраться во взаимном положении отдельных прямых и плоскости, и лишь затем начертить изображение фигуры. Итак, проводим сначала плоскость P (рис. 49), проходящую через гипотенузу треугольника, и перпендикуляр OC к плоскости P, равный $a=3$. Гипотенуза AB треугольника лежит в плоскости P; соединив ее концы A и B с точкой C, мы должны получить прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C=90°$.

По условию задачи $OB=\frac{BC}{2}$, и потому $\angle OCB=30°$, точно так же $AO=\frac{AC}{2}$, и потому $\angle OCA=30°$; следовательно, $\triangle BOC=\triangle AOC$ (УСУ) и $BC=AC$, т. е. прямоугольный треугольник ABC — равнобедренный. Обозначив катеты его через $2x$, — учащимся следует при этом пояснить целесообразность такого обозначения, — имеем, что плоскость $S_{ABC}=\frac{2x\cdot 2x}{2}=2x^2$ кв. ед.

Но $OB=x$, а потому из треугольника BOC имеем:

$$4x^2-x^2=a^2, \quad \text{или} \quad x^2=\frac{a^2}{3},$$

и, следовательно,

$$S_{ABC}=2x^2=\frac{2a^2}{3}=\frac{2\cdot 9}{3}=6 \text{ см}^2.$$

Задача эта взята из сборника геометрических задач по стереометрии Тер-Степанова, изд. 1915 г.; решение ее, повидимому, правильно, однако анализ решения задачи указывает на неправильную формулировку задачи. Действительно, $\angle CBO$ по условию должен равняться 60°, ибо $\angle BCO=30°$. Но $\triangle ABC$ — прямоугольный и равнобедренный, а потому $\angle CBA=45°$, и оказывается, что наименьший угол, образуемый прямой CB с плоскостью P, $\angle CBO=60°$, больше угла CBA, образуемого той же прямой CB с прямой BA на плоскости P, что противоречит теореме о наименьшем угле, образуемом прямой с плоскостью.

Выявившееся несоответствие можно обнаружить и другим путем: если каждый из катетов прямоугольного треугольника ABC равен $2x$, то гипотенуза его $AB = 2x\sqrt{2}$, и тогда в треугольнике AOB стороны $OA = OB = x$, а сторона $AB = 2x\sqrt{2}$, т. е. сумма двух сторон треугольника меньше третьей стороны:

$$x + x < 2x\sqrt{2},$$

что представляет собою явную нелепость.

Данная задача лишний раз указывает на то, что преподаватель должен быть весьма внимательным при выборе предлагаемых учащимся задач и обязан каждую из них предварительно проверить, действительно ли она возможна при заданных условиях, а также всякий раз исследовать решение задачи, чтобы вскрыть возможное несоответствие условий, как это имеет место в данном примере.

Приведенная задача была бы верна, если бы в ней было указано, что каждый из катетов треугольника ABC образует с плоскостью P угол в $30°$; но в таком случае получился бы и иной ответ, так как тогда $BC = AC = 2a$ и $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a = 2a^2 = 18$ *см*^{2}.

11. Проекция AB_1 (катет треугольника AB_1B) равна половине AB (гипотенузы), следовательно, $\angle ABB_1 = 30°$ и $\angle\alpha = 60°$.

12. Прежде всего строится плоскость P и к ней перпендикуляр AA_1 (рис. 50). Наклонные AB и AC, проведенные из точки A, равны, следовательно, равны и их проекции A_1B и A_1C, и угол BA_1C между проекциями равен $180° - 2\beta = 120°$, угол же, образуемый BC с AB, т. е. $\angle ABC$ $\alpha = 60°$, следовательно, треугольник ABC — равносторонний, и $BC = AB = BC = a$. Искомый отрезок $AA_1 = x$ можно най и из прямоугольного треугольника AA_1B. Обозначив $BA_1 = y$, имеем:

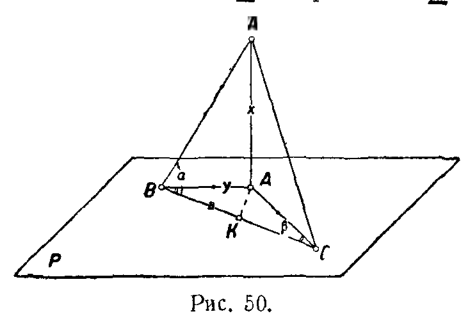


Рис. 50.

$$x = \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Приняв A_1 за центр и A_1B за радиус окружности, заключаем, что $BC = a_3 = y\sqrt{3}$, откуда

$$y\sqrt{3} = a \quad \text{и} \quad y = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

и, следовательно,

$$x = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a}{3}\sqrt{6},$$

или, при $a = 10$, имеем $x = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ *см.*

Разбор и решение задачи позволяют выполнить более четкий рисунок, соответствующий условию задачи. Сперва следует построить высоту A_1K треугольника A_1BC, а затем и треугольник A_1BC. Проведя после этого $A_1A \perp P$ и соединив точку A с точками B и C, имеем $\angle ABC = 60°$ и $AB = AC = BC = a$ и $\angle BCA_1 = \angle CBA_1 = 30°$, а $\angle BA_1C = 120°$.

13 и *14.* Построение заданного геометрического образа полезно показать на геометрическом ящике. При решении этой задачи хорошо отметить на чертеже встречающиеся прямые углы цветным мелком или карандашом, чтобы ярко выделить прямоугольные треугольники, которыми приходится пользоваться.

Из $\triangle ACB$ (рис. 40) находим $\cos\alpha = \frac{BC}{AB}$

" $\triangle DBC$ " $\cos\beta = \frac{BD}{BC}$

" $\triangle ADB$ " $\cos\gamma = \frac{BD}{AB}$.

Перемножив почленно первые два равенства

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{BC}{AB}\cdot\frac{BD}{BC}=\frac{BD}{AB}$$

и сравнив полученный результат с третьим равенством, находим:

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos\gamma.$$

Этим равенством можно воспользоваться для доказательства того, что $\alpha<\gamma$. В самом деле, если в последнем равенстве опустить множитель $\cos\beta<1$ (случай, когда $\beta=0$, отпадает, ибо тогда BD совпадает с BC и угол α с углом γ, так как $\cos 0^\circ=1$), то левая часть равенства увеличивается, и получается неравенство

$$\cos\alpha>\cos\gamma,$$

которое указывает, что $\alpha<\gamma$, ибо функция косинуса увеличивается при уменьшении угла.

При $\alpha=\beta=45^\circ$ имеем

$$\cos 45^\circ\cdot\cos 45^\circ=\cos\gamma \quad \text{и} \quad \cos\gamma=\frac{1}{2},$$

т. е. $\gamma=60^\circ$.

При $\alpha=\beta=90^\circ$ имеем

$$\cos 90^\circ\cdot\cos 90^\circ=\cos\gamma \quad \text{и} \quad \cos\gamma=0,$$

т. е $\gamma=90^\circ$. В последнем случае каждая из прямых перпендикулярна к плоскости, в которой лежат две другие прямые. Такое положение встречается, например, в кубе, три ребра которого выходят из одной его вершины.

После разбора этой задачи учащимся может быть предложен ряд аналогичных задач на вычисление углов; так, если $\alpha=40^\circ$, $\beta=60^\circ$, то

$$\gamma=\arccos\left(\frac{1}{2}\cos 40^\circ\right).$$

15. Заданный треугольник вычерчивается в определенном масштабе, например 1:2, и находится центр описанной окружности O, а затем уже выполняется чертеж всей заданной фигуры в кабинетной проекции.

Проекции наклонных KA, KB и KC равны каждая радиусу описанной окружности $R=\frac{abc}{4S}=8\frac{1}{8}$, а потому $KA=KB=KC$. После этого вычисляется тангенс угла α наклона одной из них к плоскости треугольника:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{KO}{R}=\frac{13}{8\frac{1}{8}}=1{,}6,$$

откуда $\alpha=\operatorname{arctg} 1{,}6\approx 58^\circ$.

ГЛАВА IV.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ.

§ 13. Параллельные и скрещивающиеся прямые в пространстве.

1. Параллельные прямые в пространстве определяются так же, как и параллельные прямые на плоскости. *Две прямые в пространстве называются параллельными, если они, находясь в одной плоскости, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.*

Проводя аналогию в части определения параллельных прямых в пространстве и на плоскости, необходимо особо подчеркнуть учащимся, что первый признак параллельности двух прямых, который дается в планиметрии, не имеет места в пространстве.

Так, две прямые на плоскости, перпендикулярные к одной и той же третьей прямой, параллельны; однако две прямые, заданные в про-

странстве перпендикулярно к одной и той же третьей прямой, или параллельны или не параллельны. Различные возможные положения таких прямых хорошо иллюстрировать на модели куба. В кубе $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ (рис. 51) прямые A_2D_2 и A_1D_1, перпендикулярные к ребру D_2D_1, параллельны, но прямые A_2D_2 и D_2C_2, также перпендикулярные к ребру D_2D_1, не параллельны: эти прямые лежат в плоскости верхней грани куба и имеют общую точку D_2, а потому пересекаются; если, наконец, взять прямые A_2D_2 и D_1C_1, также обе перпендикулярные к ребру D_2D_1, то и они оказываются непараллельными прямыми, хотя они и не пересекаются, сколько бы мы их ни продолжали; эти прямые не удовлетворяют условию параллельности двух прямых, а именно, они не лежат в одной плоскости; это особые прямые — скрещивающиеся прямые.

Две прямые, которые не пересекаются и не параллельны, называются скрещивающимися.

Необходимо привести учащимся достаточное число примеров прямых параллельных и прямых скрещивающихся, используя не только знакомый им куб, но и какую-либо иную каркасную модель тела (рис. 52), телеграфные провода и скрещивающиеся с ними провода антенны и т. д.

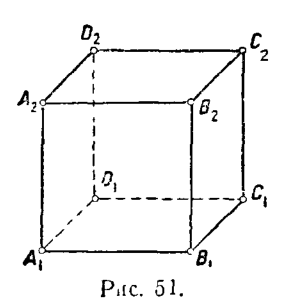


Рис. 51.

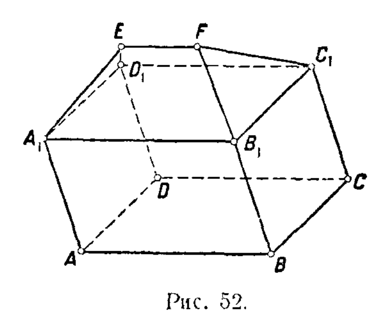


Рис. 52.

Следует приучать учащихся видеть и отличать на чертеже скрещивающиеся прямые от пересекающихся; так, ребра D_2D_1 и A_2B_2 или B_2B_1 и D_1C_1 куба (рис. 51) — скрещивающиеся прямые, хотя они и кажутся на рисунке пересекающимися.

Построение прямой, параллельной данной плоскости и проходящей через данную точку, дается только после проработки теоремы: **прямая, лежащая вне данной плоскости и параллельная какой-нибудь прямой на этой плоскости, параллельна и самой плоскости.**

2. В связи с выяснением понятия о скрещивающихся прямых необходимо пояснить учащимся соответствующими рассуждениями и показом, что через две скрещивающиеся прямые нельзя провести плоскость. В самом деле, если бы через две скрещивающиеся прямые можно было провести плоскость, то они, находясь в одной плоскости и не пересекаясь, были бы параллельны, однако это противоречит определению скрещивающихся прямых, а потому невозможно допустить, что через две скрещивающиеся прямые можно провести плоскость.

3. При рассмотрении теорем, относящихся к положению параллельных прямых относительно плоскости и плоскости относительно параллельных прямых, необходимо сопоставить отдельные теоремы с аналогичными теоремами планиметрии. Такое сопоставление аналогичных теорем планиме-

трии и стереометрии приучает учащихся видеть различие в положении прямых и плоскостей.

Так, первому признаку параллельности двух прямых на плоскости соответствует признак параллельности двух прямых в пространстве. Действительно:

Две прямые *на плоскости*, перпендикулярные к одной и той *же прямой*, параллельны.

Две прямые *в пространстве*, перпендикулярные к одной и той же *плоскости*, параллельны.

Доказательство приведенной теоремы стереометрии распадается на две части: сперва доказывается, что рассматриваемые две прямые, перпендикулярные к одной и той же плоскости, не пересекаются, а затем — что они лежат в одной плоскости. Доказательство теоремы дано в стабильном учебнике.

Должно сопоставить теоремы:

Прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых *на плоскости*, пересекает и другую.

Плоскость, пересекающая одну их двух параллельных прямых *в пространстве*, пересекает и другую.

При разборе данной теоремы стереометрии необходимо обяснить учащимся с помощью модели, что в отличие от плоскости прямая, пересекая одну из двух параллельных прямых в пространстве, или пересекает вторую прямую, параллельную первой, или не пересекает ее и является тогда по отношению к ней скрещивающейся прямой.

Верна для пространства и теорема: **две прямые в пространстве, параллельные каждая порознь одной и той же третьей прямой, параллельны между собой.**

Остается справедливой для пространства теорема об углах с параллельными сторонами. Необходимо при этом указать учащимся, что если обе стороны одного угла имеют то же направление, что и стороны другого угла, или если направление сторон одного угла противоположно направлению соответствующих сторон другого угла, то углы равны; если же направление одной стороны одного из двух углов такое же, как направление стороны другого угла, а другие стороны углов имеют противоположное направление, то углы — дополнительные, т. е. в сумме дают $2d$.

Могут быть сопоставлены теоремы:

Две параллельные прямые *на плоскости*, пересекающие *прямую*, наклонены к ней под равными углами.

Две параллельные прямые *в пространстве*, пересекающие *плоскость*, наклонены к ней под равными углами.

Приведенная теорема планиметрии говорит о равенстве соответственных углов, образуемых при пересечении двух параллельных прямых третьей: эта теорема справедлива и для пространства; в самом деле, если две прямые в пространстве параллельны, то они лежат в одной плоскости, в той же плоскости лежит и секущая, так как две точки ее — точки пересечения с параллельными прямыми — лежат в этой плоскости.

При рассмотрении приведенных теорем может быть использовано при слабом развитии пространственных представлений учащихся наглядное пособие — геометрический ящик; необходимо указать, что целесообразно прибегать к наглядным пособиям особенно при доказательстве тех теорем пространства, для которых аналогичные теоремы планиметрии неверны в трехмерном пространстве.

§ 14. Прямая, параллельная плоскости.

Рассматриваются два признака параллельности прямой и плоскости: 1) **прямая, лежащая вне данной плоскости и параллельная прямой в плоскости, параллельна самой плоскости,** и 2) **если через две точки данной прямой проведены: через одну — прямая и через другую — плоскость, перпендикулярные к данной прямой, то прямая и плоскость параллельны.**

Следует обратить внимание учащихся на то, что первый признак указывает, что прямая лежит в н е плоскости и параллельна прямой в плоскости, второй — на то, что прямая и плоскость проходят через две р а з л и ч н ы е точки прямой.

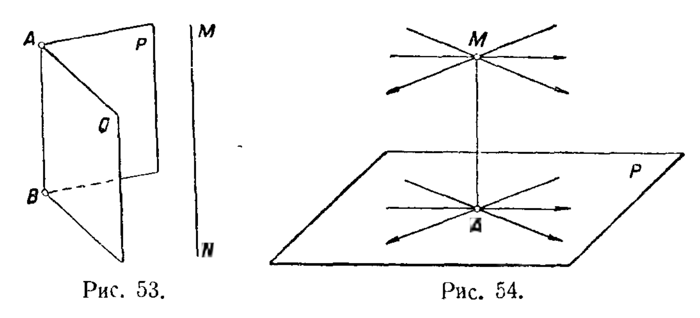


Рис. 53. Рис. 54.

Необходимо остановиться на следствии, вытекающем из первого признака; оно гласит: **прямая, параллельная линии пересечения двух данных плоскостей, параллельна каждой из плоскостей.**

Действительно, если $MN \parallel AB$, то на основании первого признака $MN \parallel P$ и $MN \parallel Q$ (рис. 53).

Надлежит также рассмотреть теорему, обратную теореме, выражающей признак параллельности прямой и плоскости.

Теорема (обратная). **Если через данную прямую, параллельную данной плоскости, провести плоскость, пересекающую данную плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.**

Доказательство данной теоремы приведено в стабильном учебнике.

Учащиеся должны иметь четкое представление о том, что через точку M, данную вне плоскости P (рис. 54), можно провести бесчисленное множество прямых, перпендикулярных к прямой MA, которая перпендикулярна к плоскости P, и что все эти прямые параллельны плоскости P и лежат в одной плоскости, параллельной данной плоскости P. Необходимо при этом подчеркнуть, что через точку вне данной прямой можно провести, согласно аксиоме параллельных, только одну прямую, параллельную данной прямой.

§ 15. Параллельные плоскости.

После того как учащимся дано определение параллельных плоскостей, рассматривается первый признак параллельности плоскостей. Признак этот следует сопоставить с признаком параллельности прямых.

$\frac{\text{Две прямые}}{\text{Две плоскости}}$, перпендикулярные к одной прямой, параллельны.

Второй признак параллельности двух плоскостей определяется теоремой: **две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые на одной из них параллельны двум пересекающимся прямым на другой плоскости.** При рассмотрении этой теоремы необходимо обратить внимание учащихся на то, что выполнения одного условия: прямые, лежащие в двух плоскостях, попарно параллельны, недостаточно, еще необходимо, чтобы прямые, лежащие в параллельных плоскостях, пересекались. Последнее следует подтвердить показом на геометрическом ящике.

Должное внимание следует уделить теореме о пересечении двух параллельных плоскостей третьей; применение данной теоремы позволит впоследствии значительно упростить выполнение построения сечений многогранников.

Приводим теоремы, которые следует сопоставить с аналогичными теоремами планиметрии.

1) **Прямая, перпендикулярная к одной из двух параллельных $\frac{\text{прямых в плоскости}}{\text{плоскостей в пространстве}}$, перпендикулярна к другой.**

2) **Отрезки параллельных прямых $\frac{\text{в плоскости}}{\text{в пространстве}}$ между параллельными $\frac{\text{прямыми}}{\text{плоскостями}}$ равны.**

3) **Если $\frac{\text{пучок}}{\text{связка}}$ прямых $\frac{\text{в плоскости}}{\text{в пространстве}}$ пересекается параллельными $\frac{\text{прямыми}}{\text{плоскостями}}$, то соответственные отрезки прямых пропорциональны.**

§ 16. Скрещивающиеся прямые и основные их свойства.

1. В связи с рассмотрением положения прямых в пространстве учащиеся уже ознакомились со скрещивающимися прямыми. Надлежит остановиться на некоторых их свойствах.

Разъясняется, что через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести одну плоскость, параллельную второй прямой, и обе эти плоскости взаимно параллельны, и дается указание, как провести эти плоскости. Соответствующая теорема и ее доказательство даны в стабильном учебнике.

2. Особое внимание должно быть уделено выяснению понятия о *кратчайшем расстоянии* между двумя скрещивающимися прямыми и умению его находить; это существенно важно для решения ряда вопросов. Кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которых лежат эти скрещивающиеся прямые.

1. Пусть даны две скрещивающиеся прямые AB и CD (рис. 55). Если провести через произвольную точку M прямой AB прямую $C_1D_1 \parallel CD$

и через произвольную точку N прямой CD прямую $A_1B_1 \parallel AB$, а затем через каждую пару пересекающихся прямых — AB и C_1D_1, CD и A_1B_1 — плоскости P и Q, то тем самым будут построены параллельные плоскости P и Q, в каждой из которых лежит одна из скрещивающихся прямых AB и CD.

Когда построены плоскости P и Q, проводят из точки M на прямой AB, лежащей в плоскости P, прямую $MM_1 \perp Q$ и через точку M_1 — прямую $A_2B_2 \parallel A_1B_1$, пересекающую данную прямую CD в точке O_1. Параллельные прямые AB и A_2B_2 лежат в некоторой плоскости S, в которой лежит и прямая MM_1, перпендикулярная к плоскости Q, а следовательно, и к плоскости P. Если затем провести в плоскости S через точку O_1 прямую $O_1O \parallel M_1M$, то $O_1O \perp A_2B_2$ и $O_1O \perp AB$, так как образовавшийся четырехугольник OO_1M_1M — прямоугольный параллелограм; в то же время $OO_1 \perp Q$, так как плоскость $Q \perp M_1M$, а потому $OO_1 \perp CD$.

Итак, отрезок OO_1, концы которого O и O_1 лежат на скрещивающихся прямых AB и CD, перпендикулярен к обеим прямым; следует еще доказать, что отрезок OO_1 — кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми AB и CD.

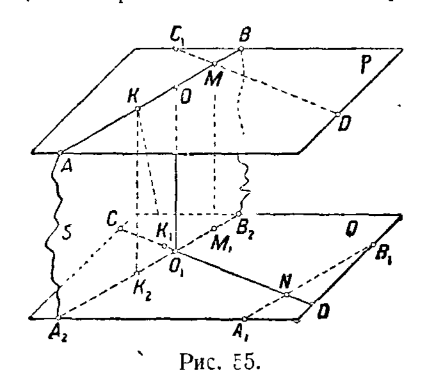


Рис. 55.

Понятно, что всякий другой отрезок, одним из концов которого является или точка O или точка O_1 одной из данных скрещивающихся прямых, другой же конец которого соответственно лежит на другой из данных скрещивающихся прямых, будет, как наклонная, длиннее отрезка OO_1, перпендикулярного к обеим скрещивающимся прямым.

Так, если взять на скрещивающихся прямых две какие-либо произвольные точки K и K_1, то, проведя прямую $KK_2 \parallel OO_1$, следует заключить, что прямая $KK_1 > KK_2$, так как наклонная KK_1 больше перпендикуляра KK_2 к плоскости Q, а потому и $KK_1 > OO_1$.

2) Необходимо еще решить вопрос, является ли отрезок OO_1 единственным общим перпендикуляром к обеим скрещивающимся прямым AB и CD.

Допустим, что существует еще другой общий перпендикуляр KK_1, и докажем, что сделанное допущение неверно. Действительно, если не только отрезок OO_1, но и отрезок KK_1 перпендикулярен к данным скрещивающимся прямым AB и CD, то четырехугольник KK_1OO_1 должен иметь 4 прямых угла. Рассмотрим, возможно ли это. Четырехугольник KK_1OO_1 — пространственный, звеньевой четырехугольник, он не лежит в одной плоскости, так как через KO и K_1O_1 нельзя провести плоскость, и, кроме того, все четыре угла звеньевого четырехугольника не могут быть прямыми углами.

Докажем это. Пусть KK_1O_1O (рис. 56) — звеньевой четырехугольник и пусть все четыре угла — прямые.

Соединим его вершины O и K_1, K и O_1 прямыми и рассмотрим сперва прямоугольные треугольники KK_1O и K_1OO_1; пусть KE и O_1E —

его медианы, тогда имеем:

$$KE = \frac{1}{2} OK_1$$
$$O_1E = \frac{1}{2} OK_1$$
$$\overline{KE + O_1E = OK_1;}$$

но $KE + O_1E > O_1K$, следовательно, $OK_1 > O_1K$.

Рассмотрим затем прямоугольные треугольники KK_1O_1 и OKO_1; пусть K_1E_1 и OE_1 — их медианы, тогда имеем:

$$K_1E_1 = \frac{1}{2} O_1K$$
$$OE_1 = \frac{1}{2} O_1K$$
$$\overline{K_1E_1 + OE_1 = O_1K;}$$

но $K_1E_1 + OE_1 > OK_1$, следовательно, $O_1K > OK_1$.

Итак, допущение, что все углы звеньевого четырехугольника прямые, приводит к нелепости, ибо одновременно не могут быть справедливы неравенства

$$OK_1 > O_1K \quad и \quad O_1K > OK_1.$$

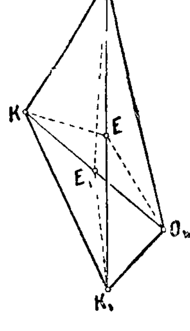


Рис. 56.

Отсюда заключаем, что допущение, что пространственный четырехугольник K_1KOO_1 имеет 4 прямых угла, невозможно; неверно и допущение, что KK_1 — другой общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым AB и CD; следовательно, OO_1 — единственный общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым AB и CD.

Должно быть отмечено, что длиною отрезка OO_1, перпендикулярного к плоскости P и Q, определяется расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат скрещивающиеся прямые.

Разбор этой теоремы следует иллюстрировать при помощи геометрического ящика; от учащихся требуются при доказательстве теоремы большое напряжение и мысли и внимания и наличие четких пространственных представлений.

§ 17. Угол, образуемый скрещивающимися прямыми.

1. Учащимся должно быть также вскрыто понятие об угле, образуемом скрещивающимися прямыми. Указывается, что за угол, образуемый двумя скрещивающимися прямыми, принимают плоский угол, получаемый пересечением двух прямых, параллельных скрещивающимся прямым AB и CD; на геометрическом ящике показывается построение угла, и на рисунке дается построение соответствующего изображения. Так, если даны скрещивающиеся прямые AB и CD, то, взяв в пространстве произвольную точку M, проводят через нее прямые, параллельные скрещивающимся прямым: $MN \parallel AB$ и $MK \parallel CD$ (рис. 57), и тогда угол NMK, образуемый прямыми MN и MK, есть угол между скрещивающимися прямыми AB и CD. Угол между двумя скрещивающимися прямыми обозначают так:

$$\angle(AB, CD).$$

Из определения угла, образованного двумя скрещивающимися прямыми, следует, что величина угла не зависит от того, где в пространстве взята точка M, вершина угла, так как углы с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны. Если построенный плоский угол KMN или угол $K_1M_1N_1$ — острый, прямой или тупой, то и угол (AB, CD), образуемый скрещивающимися прямыми, будет соответственно острым, прямым или тупым. Скрещивающиеся прямые дают всегда два угла, и если один острый, то другой тупой; за угол, образуемый скрещивающимися прямыми, принимается в таком случае острый угол; *скрещивающиеся* прямые, образующие прямой угол, называются *ортогональными,* в отличие от взаимно-перпендикулярных *пересекающихся* прямых.

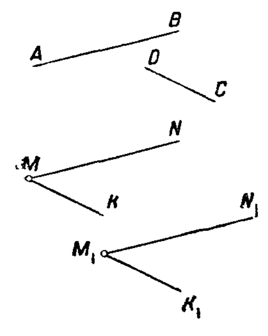


Рис. 57.

2. Введение понятия об угле, образуемом двумя скрещивающимися прямыми, позволяет несколько расширить объем некоторых уже рассмотренных теорем.

Вернемся к теореме *о трех перпендикулярах*. На рисунке 58 прямая CD, перпендикулярная к проекции BA_1 наклонной AA_1, перпендикулярна к самой наклонной AA_1 и к плоскости треугольника ABA_1, и тем самым — к любой прямой, проведенной на плоскости Q треугольника через точку A_1, например к прямой A_1A_2 или к прямой A_1A_3, перпендикулярной к плоскости P, а следовательно, и параллельной прямой AB. Но прямые AB и CD — скрещивающиеся прямые, и потому угол, образуемый ими, угол (AB, CD), равный углу A_3A_1D, — тоже прямой, и, следовательно, скрещивающиеся прямые о р т о г о н а л ь н ы — $CD \perp AB$; точно так же, если провести на плоскости P через точку B прямую $C_1D_1 \parallel CD$, то угол (AB, CD) будет равен углу ABD_1, т. е. прямому.

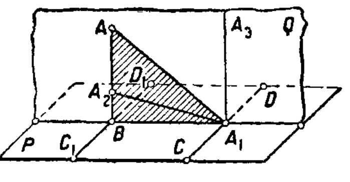


Рис. 58.

Итак, если прямая $AB \perp P$, то она образует прямые углы с любой прямой на плоскости P, например с прямыми CD, EF, KL и т. д. (рис. 59), если даже эти прямые и не проходят через ее основание на плоскости P. В самом деле, проведя на плоскости P через основание B перпендикуляра AB прямые $C_1D_1 \parallel CD$ $E_1F_1 \parallel EF$, $K_1L_1 \parallel KL$ и т. д., мы имеем $AB \perp C_1D_1$, $AB \perp E_1F_1$, $AB \perp K_1L_1$ и т. д. и $\angle ABD_1 = \angle(AB, CD) = d$; $\angle ABF_1 = \angle(AB, EF) = d$; $\angle ABL_1 = \angle(AB, KL) = d$ и т. д.

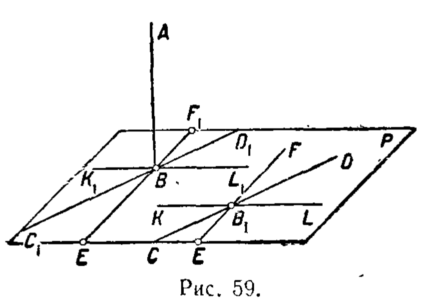


Рис. 59.

Также можно убедиться в том, что если $AB \perp CD$ и $AB \perp EF$, то $AB \perp C_1D_1$ и $AB \perp E_1F_1$, и прямая $AB \perp P$, а потому ограничение, введенное нами ранее при определении прямой AB, перпендикулярной к плоскости, и гласящее, что прямые на плоскости должны пройти через основание перпендикуляра AB,

отпадает; в силу этого отдельные определение и теорема, ранее рассмотренные, могут быть формулированы так:

1) прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна или ортогональна к любым двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости;

2) прямая, перпендикулярная к плоскости, перпендикулярна или ортогональна ко всякой прямой, лежащей в этой плоскости.

Итак, прямая CD (рис. 58), перпендикулярная к плоскости треугольника ABA_1, ортогональна к прямой AB, лежащей в этой плоскости; оправдывается название теоремы о трех перпендикулярах — прямая CD перпендикулярна к трем прямым: AB, AA_1 и A_1B.

3. Для закрепления понятия о скрещивающихся прямых и углах между ними следует решить ряд задач на построение и предложить учащимся провести доказательство нескольких теорем. Ниже приведены примерные вопросы и задачи в том порядке, в каком их целесообразно проработать с учащимися.

Задачи и вопросы.

1. В пространстве даны n параллельных между собою прямых. Найти наибольшее число плоскостей, которые можно провести через данные n прямых, если известно, что никакие три из них не лежат на одной плоскости.

2. Через данную точку M провести прямую, параллельную данной прямой AB.

3. *Через данную точку M вне данной плоскости P провести прямую, параллельную данной плоскости.*

4. Через данную точку M провести плоскость, параллельную данной прямой AB.

5. В плоскости P дана прямая AB и вне этой плоскости точка M. Сколько прямых, скрещивающихся с прямой AB и параллельных плоскости P, можно провести через данную точку M?

6. Почему не верна теорема: прямая, параллельная плоскости, параллельна всем прямым, лежащим на этой плоскости?

7. Через прямую MN, не параллельную данной прямой AB и не пересекающую AB, провести плоскость P, параллельную данной прямой.

8. Даны две скрещивающиеся прямые и вне их — точка. Провести через данную точку плоскость, параллельную данным скрещивающимся прямым.

9. Через данную точку M провести плоскость, параллельную двум непараллельным прямым.

10. Середины всех отрезков, концы которых лежат на двух скрещивающихся прямых, лежат в одной плоскости. Доказать.

11. В четырехугольнике со скрещивающимися сторонами середины его сторон служат вершинами параллелограма. Доказать.

12. Плоскость, параллельная двум сторонам четырехугольника со скрещивающимися сторонами, делит другие две его стороны на пропорциональные части. Доказать.

13. Через данную точку M провести плоскость, параллельную данной плоскости P.

14. Через две скрещивающиеся прямые AB и CD провести пару параллельных плоскостей.

15. Через данную точку M проведена прямая MN, составляющая с данной плоскостью P данный угол α. Провести плоскость Q, составляющую тот же угол с прямою MN.

16. Два отрезка, сумма которых равна m, опираются своими концами в две параллельные плоскости. Проекции этих отрезков на плоскости равны a и b. Вычислить длину каждого из отрезков, полагая $m = 12$, $a = 1$ и $b = 7$.

17. К плоскости треугольника ABC проведены через его вершины A, B и C по одну сторону от плоскости ABC перпендикуляры $AA_1 = l$, $BB_1 = m$ и $CC_1 = n$; через точки A_1, B_1 и C_1 — концы перпендикуляров — проведена плоскость $A_1B_1C_1$. Найти расстояние центра тяжести треугольника $A_1B_1C_1$ от плоскости треугольника ABC. Отрезки l, m и n соответственно равны 4, 5 и 9.

18. Дан ромб. Провести через одну из его сторон плоскость на расстоянии a от противолежащей стороны. Проекции диагоналей ромба на эту плоскость равны m и n. Найти проекции сторон ромба на ту же плоскость.

19. Отрезок AB, равный $2a$, параллелен данной плоскости P и отстоит от нее на расстояние a. Из концов A и B отрезка по разные стороны от него проведены перпендикулярно к нему две прямые до пересечения с плоскостью P в точках A_1 и B_1, при этом $AA_1 = BB_1 = 1{,}25\,a$. Найти расстояние A_1B_1.

20. Даны две параллельные плоскости P и Q и расположенный между ними отрезок AB, перпендикулярный к плоскостям P и Q, при этом конец его A упирается в плоскость P, а конец B — в плоскость Q, и $AB = a$. Проведенные из концов A и B отрезка AB наклонные AC и BD равны, $AC = BD$. Середины E и F этих наклонных соединены между собою, и $EF = b$. Найти длину наклонной CD. Вычислить CD при $a = 8$ и $b = 3$.

Указания к задачам и вопросам.

1. Каждая пара параллельных прямых однозначно определяет в пространстве положение некоторой плоскости, точно так же, как каждая пара точек однозначно определяет на плоскости или в пространстве некоторую прямую. Известно, что

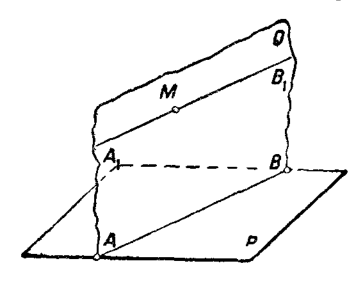


Рис. 60.

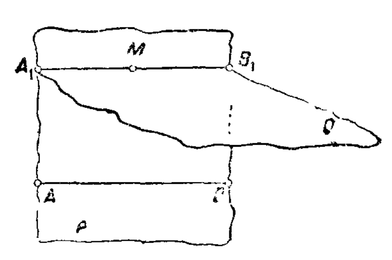


Рис. 61.

наибольшее число прямых, проходящих через n точек плоскости, из которых никакие три точки не лежат на одной прямой, равно $\frac{(n-1)n}{2}$; по аналогии можно заключить, что наибольшее возможное число плоскостей, проходящих через n параллельных прямых, из которых никакие три не лежат на одной плоскости, также равно $\frac{(n-1)n}{2}$.

2. Построение дано в стабильном учебнике.

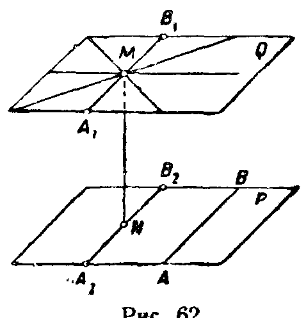


Рис. 62.

3. Проводим на плоскости P произвольную прямую AB (рис. 60); точкой M и прямой AB однозначно определяется положение плоскости Q; в этой плоскости проводим через точку M прямую $A_1B_1 \parallel AB$. На плоскости P можно провести бесчисленное множество прямых, а потому и через точку M можно провести бесчисленное множество прямых, параллельных плоскости P; все эти прямые лежат в плоскости, параллельной плоскости P.

Возможно и другое построение: из данной точки M проводят к плоскости P перпендикуляр MK, а затем прямую MN, перпендикулярную к MK; прямая MN — одна из прямых, параллельных плоскости P.

4. Точка M и прямая AB однозначно определяют положение плоскости P (рис. 61). Проводим через точку M на плоскости P прямую $A_1B_1 \parallel AB$, тогда любая плоскость Q_1, Q_2, Q_3..., проходящая через прямую A_1B_1, параллельна прямой AB, кроме плоскости, сливающейся с плоскостью P.

5. Из данной точки M следует провести к плоскости P перпендикуляр MN (рис. 62). Все прямые, перпендикулярные в точке M к прямой MN, параллельны плоскости P и лежат в плоскости Q, перпендикулярной к прямой MN и, следовательно, параллельной плоскости P.

Если провести в плоскости P через точку N прямую $A_2B_2 \parallel AB$ и в плоскости Q через точку M прямую $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, то $A_1B_1 \parallel AB$; таким образом, все прямые, лежащие в плоскости Q и параллельные прямой A_1B_1, параллельны и прямой AB и плоскости P; все же прямые, проходящие в плоскости Q через точку M, кроме прямой A_1B_1, скрещиваются с прямой AB. Итак, через точку M можно провести бесчисленное множество прямых, скрещивающихся с прямой AB и параллельных плоскости P.

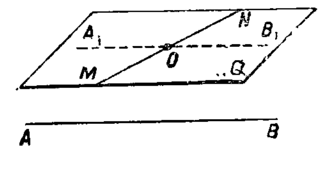


Рис. 63.

6. Ответ непосредственно вытекает из задачи № 5, ибо если бы прямая была параллельна всем прямым на плоскости, то все прямые должны были бы лежать в одной плоскости с данной прямой.

7. По условию задачи прямые AB и MN — скрещивающиеся прямые (рис. 63). Через произвольную точку O прямой MN проводим прямую $A_1B_1 \parallel AB$, тогда прямые MN и A_1B_1 однозначно определяют положение плоскости Q, которая параллельна AB; $Q \parallel AB$.

8. Через данную точку следует провести прямые, параллельные данным скрещивающимся прямым, а затем уже провести через эти прямые плоскость. Эта плоскость – искомая, и каждая из скрещивающихся прямых ей параллельна.

9. Даны две непараллельные прямые AB и CD и точка M вне их (рис. 64). Если провести через точку M прямые $A_1B_1 \parallel AB$ и $C_1D_1 \parallel CD$, то прямые A_1B_1 и C_1D_1 однозначно определяют положение плоскости Q, параллельной и данной прямой AB и данной прямой CD.

10. Через данные скрещивающиеся прямые AB и CD следует провести сперва параллельные плоскости P и Q, а затем – отрезок MN, перпендикулярный к плоскостям P и Q (рис. 65); плоскость, проходящая через середину O отрезка MN перпендикулярно к нему, разделит пополам отрезки, концы которых лежат на скрещивающихся прямых AB и CD. Справедливость такого утверждения обосновывается теоремой: **если прямые пересекаются рядом параллельных плоскостей, то отрезки прямых между параллельными плоскостями пропорциональны.**

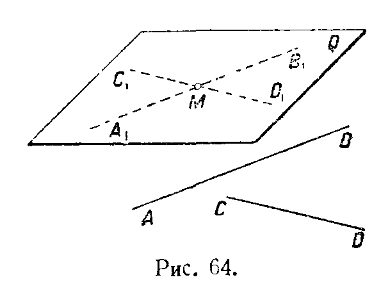


Рис. 64.

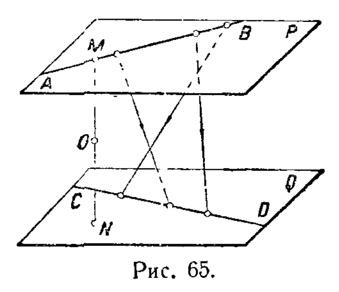


Рис. 65.

11. $ABCD$ – данный звеньевой четырехугольник (рис. 66), K, L, M и N — середины его звеньев. Если провести прямую BD, то получаются два треугольника, $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$, в которых

$$KL \parallel BD \text{ и } KL = \frac{1}{2} BD \quad \text{и} \quad MN \parallel BD \text{ и } MN = \frac{1}{2} BD,$$

откуда следует, что $KL \parallel MN$.

Через полученные две параллельные прямые KL и MN можно провести только одну плоскость; в ней лежат точки K, L, M и N — вершины четырехугольника $KLMN$; этот четырехугольник $KLMN$ — параллелограм, так как $KL \mathrel{\underline{\parallel}} MN$.

При рассмотрении рисунка 66 учащиеся должны понимать и видеть, что ни прямые AC и BD, ни прямые KL и AC, MN и AC, KN и BD, LM и BD не

пересекаются. Если учащиеся не представляют себе достаточно четко взаимное расположение отдельных скрещивающихся прямых, необходимо использовать для показа расположения прямых геометрический ящик

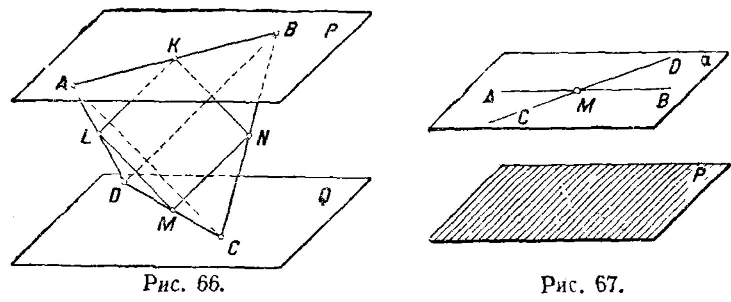


Рис. 66. Рис. 67.

12. Через две скрещивающиеся стороны звеньевого четырехугольника следует провести параллельные плоскости и между ними плоскость, параллельную проведенным двум плоскостям. Последняя плоскость рассечет тогда другие две стороны звеньевого четырехугольника на пропорциональные отрезки (задача 10).

13. Одно из решений приведено в стабильном учебнике.

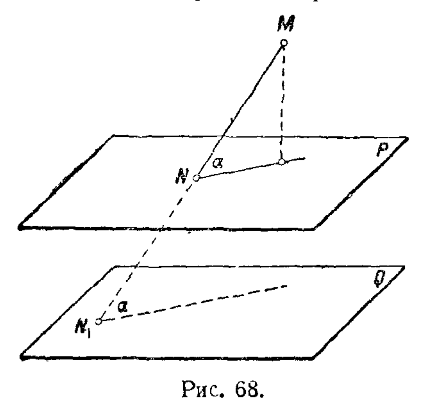


Рис. 68.

Другое решение. Проводим через данную точку M (рис. 67) две прямые AB и CD, параллельные плоскости P, тогда прямыми AB и CD однозначно определяется положение плоскости $Q \parallel P$.

14. Решение приведено в стабильном учебнике.

15. Через произвольную точку прямой MN проводим плоскость $Q \parallel P$ (рис. 68), тогда прямая MN пересечет и плоскость Q и образует с ней тот же угол α.

16. Сперва следует построить две параллельные плоскости P и Q (рис. 69), а затем — две наклонные AB и CD, опирающиеся своими концами в плоскости P и Q. Если провести $AA_1 \perp P$ и $CC_1 \perp P$, то получатся соответственно проекция A_1B отрезка AB и проекция C_1D отрезка CD на плоскость P. Нужно обратить внимание учащихся на то, что длина проекций обоих отрезков не зависит от того, на которую из плоскостей будет спроектирован тот или иной отрезок, так как плоскости параллельны.

Обозначим длину каждого из отрезков соответственно через x и y; тогда, согласно условию, $x + y = m$. (1)

Получаем одно уравнение с двумя неизвестными. Чтобы найти значения x и y, надо составить еще одно уравнение, содержащее x и y. Перпендикуляры AA_1 и CC_1 равны, и $AA_1^2 = x^2 - a^2$, а $CC_1^2 = y^2 - b^2$, а потому

$x^2 - a^2 = y^2 - b^2$ или $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ (2)

Имеем систему двух уравнений второй степени с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 - b^2 \\ x + y = m. \end{cases}$$

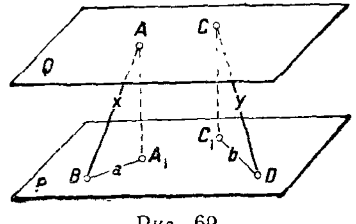


Рис. 69.

Деля почленно первое уравнение на второе, находим:

$$x - y = \frac{a^2 - b^2}{m}.$$

После этого вопрос сводится к решению системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x+y=m \\ x-y=\dfrac{a^2-b^2}{m}. \end{cases}$$

Путем почленного сложения и вычитания обоих уравнений находим:

$$x=\frac{a^2-b^2+m^2}{2m} \quad \text{и} \quad y=\frac{m^2-a^2+b^2}{2m}.$$

Для заданных числовых значений $m=12$, $a=1$, $b=7$ имеем:

$$x=\frac{1-49+144}{24}=4 \quad \text{и} \quad y=\frac{144-1+49}{24}=8.$$

Для получения четкого изображения заданного геометрического образа целесообразно изобразить параллельные плоскости P и Q равными параллелограмами, расположенными один над другим, и выделить наклонные AB и CD цветными мелками.

17. Следует построить изображение плоскости P и на ней изображение треугольника ABC (рис. 70), а затем провести

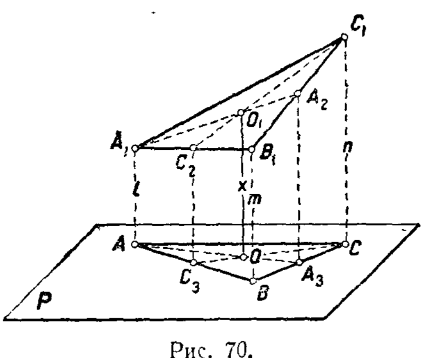


Рис. 70.

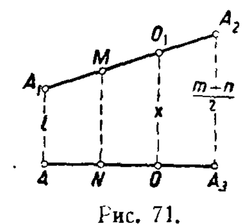


Рис. 71.

перпендикуляры $AA_1=l$, $BB_1=m$ и $CC_1=n$ и плоскость $A_1B_1C_1$; после этого проводят медианы A_1A_2 и C_1C_2 треугольника $A_1B_1C_1$. Проекции A_3 и C_3 точек A_2 и C_2 являются серединами сторон BC и AB треугольника ABC. Если соединить точку O пересечения медиан треугольника ABC с точкой O_1 пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$, то OO_1— искомое расстояние центра тяжести треугольника $A_1B_1C_1$ от плоскости P.

Длину перпендикуляра OO_1 можно найти из трапеции $AA_1A_2A_3$ (рис. 71), параллельные стороны которой $AA_1=l$ и $A_2A_3=\frac{m+n}{2}$, так как A_2A_3 есть средняя линия трапеции BB_1C_1C. Принимая во внимание, что на основании свойств медиан треугольника $O_1A_2=\frac{1}{3}A_1A_2$ и $OA_3=\frac{1}{3}AA_3$, находим:

$$OO_1=x=\frac{1}{2}\left(\frac{x+l}{2}+\frac{m+n}{2}\right),$$

откуда $4x=x+l+m+n$, или $3x=l+m+n$, или $x=\frac{l+m+n}{3}$. Итак, OO_1 равно среднему арифметическому из расстояний вершин A_1, B_1 и C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ от плоскости P.

Для частного случая, когда $l=4$, $m=5$ и $n=9$, имеем:

$$x=\frac{4+5+9}{3}=6.$$

Для большей наглядности того, как вычислить x, целесообразно вычертить отдельно трапецию $AA_1A_2A_3$ и прямую $OO_1 \parallel AA_1$, а затем, разделив отрезки A_1O

и AO пополам, провести MN — среднюю линию трапеции AA_1O_1O. Находим: $MN = \frac{x+l}{2}$ и $x = \frac{MN + A_2A_3}{2}$, как средняя линия трапеции MNA_3A_2, откуда

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{x+l}{2} + \frac{m+n}{2}\right).$$

Могут быть рассмотрены случаи, когда одна или две из вершин треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на плоскости P, или когда одна из его вершин лежит по другую сторону от плоскости P; для последнего случая полезно использовать геометрический ящик.

18. Построение изображения геометрического образа, о котором говорится в данной задаче, представляет некоторые трудности, а потому следует построить его сперва на геометрическом ящике. При построении рекомендуется принять плоскость ящика за плоскость, которую требуется провести через сторону ромба, ромб же построить так, чтобы одна из его сторон лежала в плоскости ящика, а другая, противолежащая ей, была бы параллельна этой плоскости.

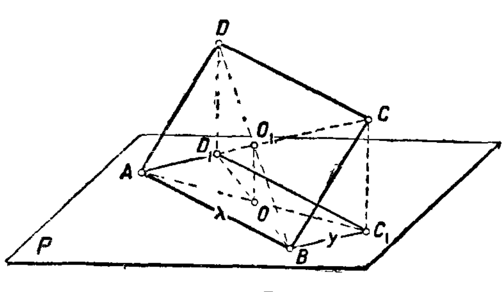


Рис. 72.

Построив плоскость P и перпендикуляр к ней $C_1C = a$ (рис. 72), проводим на плоскости P прямую $C_1A = m$ и соединяем точку C с точкой A; тогда CA — диагональ ромба. Через середину O отрезка AC_1 — проекции диагонали AC ромба — проводим $BD_1 = n$ под острым углом D_1OA к AC_1, притом так, чтобы $OD_1 = OB$; если затем провести $D_1D = CC_1 = a$, то найдем точку D — четвертую вершину ромба. Итак, построен ромб $ABCD$ и его проекция на плоскость P — параллелограм ABC_1D_1.

Обозначим сторону ромба через x. Проекции на плоскость P сторон $DC = AB$ ромба равны его сторонам, т. е. x; проекции же сторон ромба BC и AD будут BC_1 и AD_1; они равны, $BC_1 = AD_1$, обозначим их через y.

Из треугольника BC_1C имеем:

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (1)$$

Из параллелограма ABC_1D_1 имеем:

$$2x^2 + 2y^2 = m^2 + n^2, \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = \frac{m^2+n^2}{2}. \qquad (2)$$

Получаем систему двух уравнений второй степени с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{m^2+n^2}{2} \\ x^2 - y^2 = a^2. \end{cases}$$

Почленным сложением и вычитанием находим:

$$2x^2 = \frac{m^2+n^2+2a^2}{2} \quad \text{и} \quad 2y^2 = \frac{m^2+n^2-2a^2}{2},$$

откуда

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2+2a^2} \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2-2a^2}.$$

19. Когда построено изображение плоскости P, следует построить на ней отрезок $A_2B_2 = 2a$ (рис. 73), провести в точках A_2 и B_2 перпендикуляры $A_2A = B_2B = a$ и, наконец, соединить точки A и B, тогда AB — данный отрезок; его можно выделить красным цветом. Проводим затем на плоскости P $A_1A_2 \perp A_2B_2$ и $B_1B_2 \perp A_2B_2$, откладываем $A_1A_2 = B_1B_2$ и соединяем точки A и A_1, B и B_1, тогда AA_1 и BB_1 — искомые перпендикуляры к прямой AB. В самом деле, пря-

мая A_2B_2 перпендикулярна к плоскостям AA_2A_1 и BB_2B_1, и потому и прямая AB перпендикулярна к этим плоскостям, а следовательно, и к прямым AA_1 и BB_1.

По условию наклонные $AA_1 = BB_1 = 1{,}25\,a$, их проекции A_2A_1 и B_2B_1 равны по построению. Находим длину отрезка A_1B_1; для этого соединяем прямыми точки A_2 и B_1 и точки A_1 и B_2, получаем четырехугольник $A_1A_2B_1B_2$, в котором $A_1A_2 = B_1B_2$, следовательно, этот четырехугольник — параллелограм, и диагональ его A_1B_1 — искомый отрезок; обозначим его через x; другой диагональю четырехугольника $A_1A_2B_1B_2$ будет $A_2B_2 = AB = 2a$. Известно, что диагонали параллелограма взаимно делятся пополам, а потому $OB_1 = OA_1 = \frac{x}{2}$, кроме того, имеем из прямоугольного треугольника OB_2B_1:

$$OB_1^2 = OB_2^2 + B_2B_1^2;$$

$$OB_1^2 = \frac{x^2}{4}; \quad OB_2^2 = a^2 \quad \text{и} \quad B_2B_1^2 = (1{,}25a)^2 - a^2 = 2{,}25a \cdot 0{,}25a = 0{,}5625a^2,$$

следовательно,

$$\frac{x^2}{4} = a^2 + 0{,}5625a^2,$$

откуда

$$x^2 = 6{,}25a^2 \quad \text{и} \quad x = 2{,}5a.$$

Эту задачу можно было бы решить иначе, если повернуть треугольник BB_2B_1 на 180° вокруг BB_2 и затем рассматривать прямоугольный $\triangle\, B_1B_3A_1$, в котором $A_1B_1 = x$, $A_1B_3 = 2a$, $B_1B_3^2 = (2B_1B_2)^2 = 2{,}25a^2$, как это было найдено выше, следовательно, $x^2 = 4a^2 + 2{,}25a^2$ и $x = 2{,}5a$.

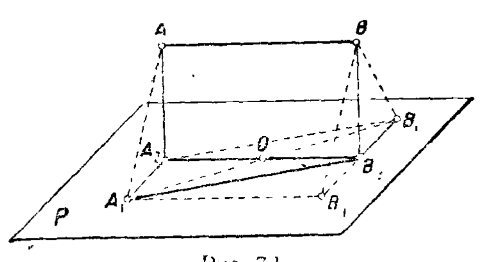


Рис. 73.

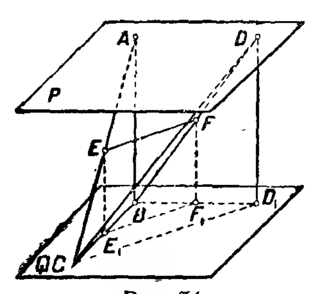


Рис. 74.

29. Полезно требуемую в задаче фигуру построить предварительно на геометрическом ящике и только после этого дать ее изображение на бумаге или доске. Строим изображение двух параллельных плоскостей P и Q (рис. 74), затем проводим AB перпендикулярно к плоскостям P и Q и, наконец, наклонные AC и BD. Наклонные равны, а потому их проекции BC и BD_1 равны. В целях упрощения построения расположим наклонные AC и BD так, чтобы проекция BD_1 была параллельна нижнему краю листа, а проекция BC была перпендикулярна к нему, как это показано на рисунке 74; в силу этого отрезок BD_1 дан в действительную величину, отрезок же BC сокращен вдвое. Находим длину отрезка CD, который отметим на рисунке красным или иным ярким цветом. Проводим в плоскости ABC прямую $EE_1 \parallel AB$ и в плоскости BD_1D прямую $FF_1 \parallel DD_1$, тогда получим прямоугольник EE_1F_1F; точки E_1 и F_1 — середины отрезков BC и BD_1, а потому отрезок $CD_1 = 2E_1F_1 = 2EF = 2b$.

Наконец, находим из прямоугольного треугольника DD_1C:

$$x^2 = a^2 + 4b^2 \quad \text{и} \quad x = \sqrt{a^2 + 4b^2}.$$

Подставляя вместо a и b заданные значения 8 и 3, имеем:

$$x = \sqrt{64 + 36} = 10.$$

ГЛАВА

ДВУГРАННЫЕ УГЛЫ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ. МЕТОДИКА ВОПРОСА.

§ 18. Возникновение и определение двугранного угла.

Если в плоскости P провести две пересекающиеся в точке O прямые AB и CD (рис. 75), то плоскость разделится ими на 4 области, и образуются 4 „плоских" угла: $\angle AOC$, $\angle COB$, $\angle BOD$ и $\angle DOA$.

Точно так же две плоскости P и Q, пересекающиеся по прямой AB (рис. 76), делят пространство на 4 области и образуют 4 „двугранных угла". *Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями, выходящими из одной прямой.* Прямая AB, из которой выходят полуплоскости P и Q, — ребро соответствующего двугранного угла; полуплоскости P и Q — грани двугранного угла.

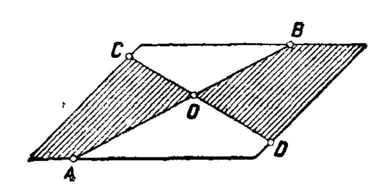


Рис. 75.

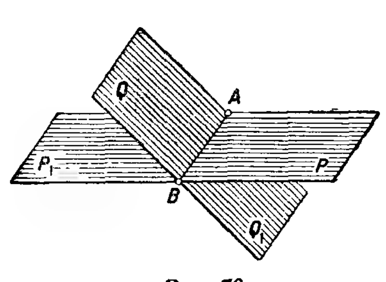


Рис. 76.

На рисунке 76 даны двугранные углы $PABQ$, P_1ABQ, P_1ABQ_1 и Q_1ABP. Моделью двугранного угла служит угол, образуемый двумя смежными стенами, стеной и полом или потолком комнаты, листами раскрытой книги и пр.

Указывается, что двугранный угол обозначается четырьмя буквами: на первом и на последнем месте ставятся буквы, обозначающие полуплоскости или грани угла, например P и Q, а между ними — буквы, обозначающие ребро AB двугранного угла; запись:

$PABQ$ — двугранный угол.

Весьма полезно провести параллель между двугранным углом и углом на плоскости и соответствующими их обозначениями. Так, полуплоскости P и Q — грани двугранного угла — соответствуют лучам — сторонам угла на плоскости, линия же пересечения граней, ребро AB, — точке, вершине плоского угла.

§ 19. Двугранный угол как величина.

1. Переходя к сравнению между собою двугранных углов, необходимо указать учащимся, что в равенстве или неравенстве плоских углов убеждаются **методом наложения** одного угла на другой, в равенстве же или неравенстве двугранных углов — **вложением** одного угла в другой.

Так, чтобы убедиться в равенстве двух углов

а) плоских,	б) двугранных,
совмещают сперва их **вершины**, затем **сторону** одного угла со **стороной** другого, и если вторая **сторона** первого угла пой-	совмещают сперва их **ребра**, затем **грань** одного угла с **гранью** другого, и если вторая **грань** первого угла пойдет по второй

дет по второй стороне другого угла, то плоские углы совпадают и, следовательно, равны.

грани другого угла, то двугранные углы совпадают и, следовательно, равны.

Не лишне обратить внимание учащихся на то, что: 1) два луча или две полупрямые, выходящие из одной и той же точки A, образуют на плоскости угол и делят плоскость на две области, внутреннюю M и внешнюю N (рис. 77), 2) две же полуплоскости P и Q, выходящие из одной и той же прямой AA_1, образуют двугранный угол и делят пространство на две области, внутреннюю M_1 и внешнюю N_1 (рис. 78).

Поэтому понятно, что в том случае, когда двугранные углы не равны, одна из граней меньшего двугранного угла пойдет внутри большего двугранного угла после того, как совместились ребра, и по одной из граней обоих двугранных углов.

Рис. 77.

Возникает вопрос, нет ли иного способа сравнения двугранных углов, а также вопрос об их измерении. Указывается, что для этой цели рассмотрение двугранных углов сводится к рассмотрению соответствующих им плоских углов, которые называются **линейными** углами двугранных углов и определяют их величину.

Указывается, как выполняется построение линейного угла через точку C, взятую где-либо на ребре AB двугранного угла $PABQ$ (рис. 79), проводят как в грани P, так и в грани Q соответственно перпендикуляры CD и CE к ребру AB, эти перпендикуляры CD и CE определяют положение плоскости, которая, пересекаясь с гранями P и Q, дает плоский угол DCE; этот плоский угол DCE и называется *линейным углом* двугранного угла $PABQ$ и принимается за *меру* двугранного угла.

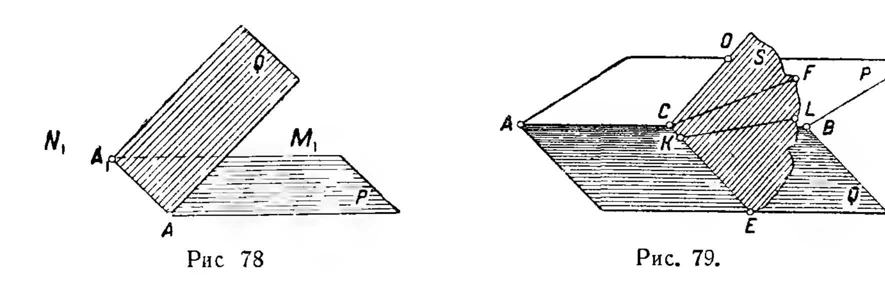


Рис 78 Рис. 79.

Плоскость S, проведенная через перпендикуляры CD и CE к ребру AB, перпендикулярна к ребру AB на основании теоремы о двух перпендикулярах; отсюда следует, что всякая прямая, лежащая в плоскости S линейного угла DCE, перпендикулярна к ребру AB; так, прямая $CF \perp AB$ и прямая $LK \perp AB$.

После указанных разъяснений можно дать следующее определение линейного угла двугранного угла: *плоскость, перпендикулярная к ребру двугранного угла, пересекает его грани по прямым, образующим линейный угол двугранного угла* и подчеркнуть, что ребро двугранного угла перпендикулярно к плоскости линейного угла.

Учащимся должно быть указано, что величина линейного угла не зависит от того, через какую точку ребра двугранного угла проводится перпендикулярная к ребру плоскость. Действительно, прямые, по которым различные плоскости, перпендикулярные к ребру двугранного угла, пересекают его грани, параллельны и, следовательно, образуют углы с параллельными сторонами, либо углы острые, либо тупые, а такие углы равны. Отсюда вывод: **величина линейного угла не зависит от положения его вершины на ребре двугранного угла.**

Нужно указать, что по мере уменьшения или увеличения двугранного угла соответственно уменьшается или увеличивается его линейный угол и что в том случае, когда грани двугранного угла совпадают, и двугранный угол и его линейный угол равны нулю.

Хорошей моделью для иллюстрации изменения величины двугранного угла и его линейного угла может служить дверь; открывая или закрывая дверь, мы можем получить двугранные углы различной величины.

2. Соотношение между двугранными углами и их линейными углами устанавливается теоремой: **если двугранные углы равны, то равны и их линейные,** и соответствующей теоремой, обратной данной.

Если класс силен, желательно остановиться на теореме: **если линейные углы относятся, как $m:n$, то и соответствующие им двугранные углы относятся, как $m:n$,** а также на обратной теореме.

При выводе теоремы о пропорциональности двугранных углов и их линейных можно ограничиться рассмотрением случая, когда данные углы соизмеримы; однако необходимо указать учащимся, что теорема справедлива и в том случае, когда данные углы несоизмеримы.

Разбор теоремы о соотношении между двугранными углами и их линейными углами позволяет отметить, что двугранный угол измеряется соответствующим ему линейным углом; поясняется, что величина двугранного угла, как и линейного угла, измеряется в градусах, минутах и секундах Так, если линейный угол равен 37°30′, то и соответствующий ему двугранный угол равен 37°30′, и наоборот. Понятно, что двугранный угол называется острым, прямым или тупым, если соответствующий ему линейный угол острый, прямой или тупой.

Особое внимание должно быть уделено прямому двугранному углу; его линейный угол — прямой, стороны его взаимно-перпендикулярны, и, следовательно, грани прямого двугранного угла — взаимно-перпендикулярные плоскости.

Дается определение противоположных, прилежащих и смежных двугранных углов и рассматриваются их свойства.

В связи с проработкой темы „двугранные углы" учащиеся должны приобрести твердые навыки в построении линейных углов, различно расположенных относительно плоскости чертежа двугранных углов. Полезно упражнять учащихся, показывая на моделях отдельных тел двугранные углы, также чертить мелом на гранях тел линейные углы тех или иных двугранных углов.

Для показа, что с изменением двугранного угла изменяется и его линейный угол, можно использовать геометрический ящик; прикрепленный к ящику транспортир позволяет непосредственно найти величину линейного, а тем самым и величину двугранного угла.

Учащимся могут быть предложены задачи, в которых требуется от руки провести построение; задачи даются для того, чтобы развить их пространственную интуицию.

Задачи. 1) Построить линейный угол заданного двугранного угла $PABQ$, вершина которого лежит в заданной точке M на ребре AB.

2) На грани P двугранного угла $PABQ$ дана точка K. Построить линейный угол данного двугранного угла так, чтобы одна из сторон линейного угла прошла через данную точку K.

3) Построить куб и линейный угол двугранного угла, образуемого двумя боковыми гранями; нижним основанием и боковой гранью; верхним основанием и боковой гранью.

4) Дан двугранный угол $PABQ$; построить противоположный ему двугранный угол и соответствующий ему линейный угол.

5) Дан двугранный угол $PABQ$, построить смежный ему двугранный угол и линейные углы обоих двугранных углов.

6) Дан двугранный угол $PABQ$ и его линейный угол KLM. Провести биссектрису LN линейного угла и провести плоскость, делящую пополам данный двугранный угол.

7) В кубе через диагонали верхнего и нижнего оснований проведена плоскость S. Найти величину двугранного угла между плоскостью S и плоскостью боковой грани.

8) В кубе через противолежащие стороны A_1B_1 и D_2C_2 верхнего и нижнего оснований проведена плоскость S. Найти величину двугранных углов, образуемых плоскостью S с плоскостями оснований куба.

§ 20. Перпендикулярные плоскости.

1. Знакомство учащихся с прямыми двугранными углами позволяет перейти к теме „перпендикулярные плоскости".

Определение: *две пересекающиеся плоскости взаимно-перпендикулярны, если они образуют прямые двугранные углы.*

Для показа взаимно-перпендикулярных плоскостей используется подвижная модель противоположных двугранных углов; отмечается взаимное положение двух стен, стены и потолка, стены и пола в комнате, рассматриваются взаимное положение граней куба и отдельные окружающие нас предметы, на которых могут быть показаны взаимно-перпендикулярные плоскости. В связи с рассмотрением признака перпендикулярности двух плоскостей: **плоскость, проходящая через перпендикуляр к другой плоскости, перпендикулярна к последней,** следует обратить внимание учащихся на то, что через прямую AB, перпендикулярную к данной плоскости P, можно провести бесчисленное множество плоскостей, также перпендикулярных к данной плоскости P (рис. 80), и что через наклонную CD, образующую с данной плоскостью P не прямой угол и, следовательно, к ней не перпендикулярную, можно провести только одну плоскость, перпендикулярную к данной плоскости P (рис. 81). В самом деле, если из произвольной точки C наклонной CD провести к плоскости P перпендикуляр CK, а затем через пересекающиеся прямые CD и CK плоскость Q, то эта плоскость Q перпендикулярна к плоскости P, так как проходит через перпендикуляр CK к плоскости P, и плоскость Q — единственная, которую можно провести через две пересекающиеся прямые, прямую CD и один из перпендикуляров к плоскости P, пересекающий прямую CD; действительно, если взять на прямой CD не точку C, а какую-либо другую точку, и провести через нее перпендикуляр к плоскости P, то он будет лежать в той же плоскости Q.

Выясняется, что через данную прямую CD можно провести к данной плоскости P только одну к ней перпендикулярную плоскость Q, если данная прямая CD или параллельна плоскости P, или лежит **в** ней.

Рассматриваются теорема, обратная теореме о признаках перпендикулярности двух плоскостей, и следствие из нее.

***Теорема*: если две плоскости *P* и *Q* взаимно-перпендикулярны, то перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки плоскости *P* к плоскости *Q*, лежит в плоскости *P* всеми своими точками.**

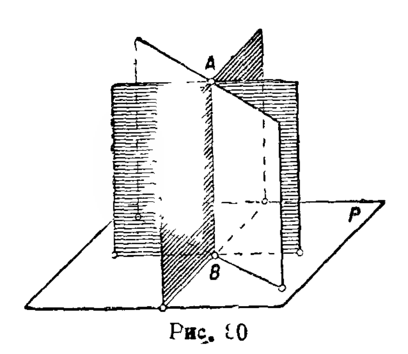


Рис. 80

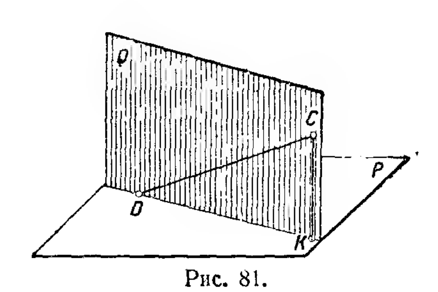


Рис. 81.

Теорема доказывается методом доказательства от противного.

***Следствие*: если две пересекающиеся плоскости (*P* и *Q*) перпендикулярны к одной и той же третьей плоскости (*S*), то и линия их пересечения (*MN*) перпендикулярна к третьей плоскости (*S*)** (рис. 82).

Весьма существенно показать учащимся, как найти угол между двумя непараллельными плоскостями, пересечение которых не дано.

Этот угол равен одному из углов, образуемых двумя перпендикулярами, проведенными к непараллельным плоскостям из произвольной точки, лежащей вне этих плоскостей. При построении искомого угла следует взять произвольную точку относительно двугранного угла внутри, вне или на его грани. Разбор задачи н а й т и у г о л м е ж д у д в у м я н е п а р а л л е л ь н ы м и п л о с к о с т я м и приведен в стабильном учебнике.

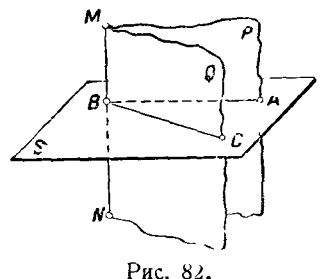


Рис. 82.

2. При проработке приведенных выше теорем должны быть широко использованы, как вообще при рассмотрении пространственных образов, **в** качестве моделей известные учащимся тела: куб, призма, пирамида. Показ на телах и на геометрическом ящике взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве как нельзя лучше содействует развитию пространственных представлений учащихся, накоплению ими опыта в распознавании пространственных образов и уяснению стереометрических теорем.

Запоминание значительного числа теорем и следствий, которыми насыщены первые главы стереометрии, представляет для учащихся большие трудности; с другой стороны, знание этих теорем и следствий из них существенно важно для обоснования свойств пространственных фигур.

Все это вынуждает выделить из общего числа теорем в качестве основных те из них, которые учащиеся должны безусловно знать, ибо, не зная их, учащиеся не будут владеть той теоретической базой, которая необходима для обоснования в дальнейшем ряда новых положений.

Ниже приводим такой перечень основных теорем, знание которых позволяет обосновать дальнейшие разделы курса.

1) **Если прямая перпендикулярна (ортогональна) к двум пересекающимся прямым в плоскости, то она перпендикулярна и к самой плоскости.**

2) **Если из внешней точки к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, то прямая на плоскости, перпендикулярная (ортогональная) к проекции наклонной (к наклонной), перпендикулярна (ортогональна) и к наклонной (к проекции наклонной).**

3) **Два различных перпендикуляра к одной плоскости параллельны.**

3а) **Если одна из параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая перпендикулярна к этой плоскости.**

4) **Прямая, параллельная какой-нибудь прямой в плоскости, параллельна и самой плоскости.**

5) **Если через каждую из двух параллельных прямых провести по плоскости так, чтобы эти плоскости пересекались, то линия пересечения плоскостей параллельна данным прямым.**

6) **Две прямые (плоскости), параллельные каждая порознь третьей прямой (плоскости), параллельны между собой.**

7) **Углы с параллельными сторонами равны или пополнительны и лежат в параллельных плоскостях** или в одной плоскости, если параллельные плоскости сливаются.

8) **Плоскость, пересекающая две параллельные плоскости, пересекает их по прямым параллельным.**

9) **Две плоскости, перпендикулярные к одной прямой, параллельны.**

10) **Все линейные углы данного двугранного угла равны.**

11) **Плоскость, проходящая через перпендикуляр к другой плоскости, перпендикулярна к последней.**

12) **Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одной из двух взаимно-перпендикулярных плоскостей к другой из них, весь лежит в первой плоскости.**

13) **Если плоскость перпендикулярна к двум пересекающимся плоскостям, то она перпендикулярна и к линии их пересечения.**

14) **Наименьший из углов, образуемых прямой с прямыми, проведенными на плоскости, есть угол, образуемый прямой и ее проекцией на плоскость.** Этот угол и называется углом прямой с плоскостью.

Отчетливое понимание и знание перечисленных теорем позволит учащимся, как уже было указано, вести дальнейшую работу, выполнять разного рода построения, разбираться в вопросах, связанных с вычислением поверхностей и объемов тел.

Ограничивая число теорем, знание которых обязательно, мы отнюдь не думаем утверждать, что, помимо перечисленных теорем, с учащимися не должны быть разобраны еще и другие теоремы, относящиеся к вопросам взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве;

напротив, такие теоремы должны быть разобраны с учащимися, так как они способствуют лучшему уяснению учащимися отдельных свойств пространственной фигуры, однако необязательно требовать от учащихся умения привести исчерпывающее их доказательство, особенно, если теоремы не предусмотрены программой и не разобраны в стабильном учебнике.

Вместе с тем следует позаботиться о том, чтобы учащиеся научились строить любой геометрический пространственный образ, о котором идет речь, будь то в теореме или задаче, и свойства которого должны быть рассмотрены и доказаны или отдельные элементы которого должны быть построены и вычислены. Всегда надо иметь в виду, что умение построить геометрический образ путем изготовления его модели, а также правильно начертить его изображение как нельзя лучше служит выполнению одной из основных задач изучения геометрии — развитию пространственных представлений; в связи с этим должно быть уделено достаточно времени и внимания задачам на построение.

Задачи и вопросы.

В нижеследующих задачах, в которых требуется провести построения, последние *делаются от руки; цель задач — развитие комбинаторного мышления и* пространственной интуиции.

1. Построить двугранный угол по данному линейному углу ABC.

2. Построить проекции данной точки на данную плоскость и данной прямой на данную плоскость.

3. Через данную точку M провести плоскость, перпендикулярную к данной плоскости P.

4. Через данную точку M провести три взаимно-перпендикулярные плоскости.

5. Провести общий перпендикуляр к двум данным прямым и определить кратчайшее расстояние между ними.

6. Провести через данную точку M прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые AB и CD.

7. Дан прямой двугранный угол и внутри его точка A, отстоящая от одной из граней на расстояние a, а от другой на расстояние b. Найти расстояние от точки A до ребра двугранного угла.

8. Двугранный угол равен 120°. Точка K внутри угла отстоит от каждой грани на расстояние $KA = KB = a$. Найти длину отрезка AB.

9. Отрезок AB упирается своими концами A и B в грани прямого двугранного угла; проекции отрезка AB на грани равны a и b, а проекция его на ребро равна c. Найти длину отрезка AB.

10. Прямая, лежащая в одной из граней двугранного угла, образует с другой гранью угол $\alpha = 30°$, а с ребром угол $\beta = 45°$. Найти двугранный угол.

11. Дан двугранный угол $PABQ$ и внутри его точка M. Провести через эту точку M прямую и плоскость, образующую с гранями P и Q равные углы.

12. Дан прямой двугранный угол; разделить его на три равные части.

Приведенные задачи далеко не исчерпывают всех задач на построение; приведены задачи основные. При трудностях построения рекомендуется одновременное демонстрирование фактического построения на геометрическом ящике.

Указания к задачам и вопросам.

1. Проводим сперва прямую MN перпендикулярно к прямым BA и BC (рис. 82), т. е. к плоскости S линейного угла в точке B. Прямые MN и BA однозначно определяют плоскость P, а прямые MN и BC — плоскость Q; угол $PMNQ$ — искомый и единственный, если не считать двугранного угла, противоположного данному.

2. Решение приводится в любом учебнике геометрии.

3. Проводим через точку M, лежащую вне плоскости P или на ней, прямую

$MN \perp P$ и через MN плоскость Q. Плоскость $Q \perp P$. Однако через прямую MN можно провести бесчисленное множество плоскостей: Q_1, Q_2, $Q_3 \ldots$, следовательно, и бесчисленное множество плоскостей, перпендикулярных к плоскости

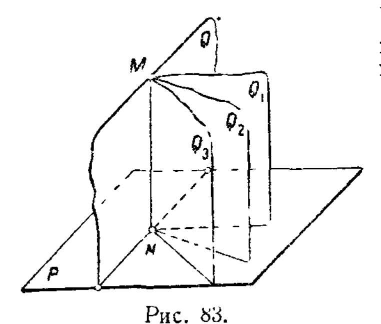
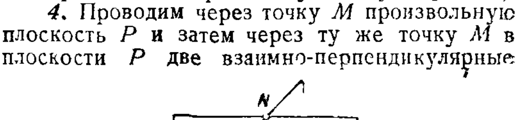


Рис. 83.



P и проходящих через данную точку M (рис. 83).

4. Проводим через точку M произвольную плоскость P и затем через ту же точку M в плоскости P две взаимно-перпендикулярные

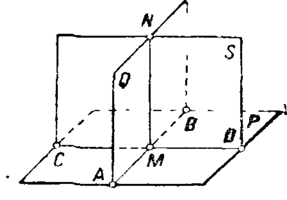


Рис. 84.

прямые AB и CD; далее $MN \perp P$ (рис. 84). Прямые MN и AB однозначно определяют положение плоскости $Q \perp P$, а прямые MN и CD — положение плоскости $S \perp P$; при этом $Q \perp S$, так как $\angle AMD = d$.

5 и *6*. Решения приведены в стабильном учебнике.

7. Строим от руки чертеж, соответствующий условию задачи (рис. 85). *Перпендикуляры, проведенные из точек B и C на ребро MN двугранного угла*, пересекаются в точке A_1 на ребре MN. Действительно, перпендикуляры AB и AC однозначно определяют плоскость, которая является плоскостью линейного угла данного двугранного угла $PMNQ$, так как она перпендикулярна и к плоскости P и к плоскости Q, а потому она перпендикулярна и к ребру MN и пересекает его в точке A_1. Получим прямоугольник ABA_1C со сторонами a и b, в котором AA_1 — его диагональ, а потому

$$AA_1 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

8. Строим плоскость P; пусть она является одной из граней данного двугранного угла и пусть MN - его ребро. Проводим через точку A прямую $A_1B_1 \perp MN$ и, кроме того, прямую $A_1C_1 \perp P$. Затем строим в плоскости, определяемой прямыми A_1B_1 и A_1C_1, т. е. в плоскости, перпендикулярной к плоскости P, угол $B_1A_1D_1 = 120°$. Ясно, что прямые MN и A_1D_1 определяют положение плоскости второй грани Q двугранного угла. Разделим теперь линейный

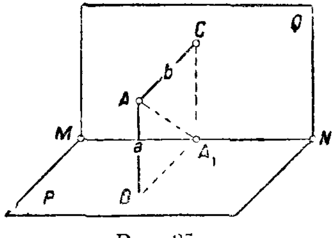


Рис. 85.

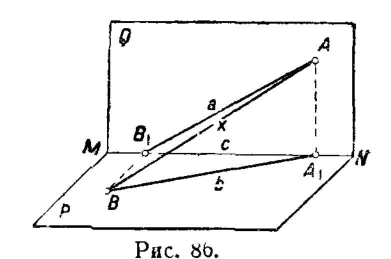


Рис. 86.

угол $B_1A_1D_1$ пополам и возьмем на биссектрисе A_1K точку K, расстояние которой $KA = KB$ от граней P и Q равно a. Угол $AKB = 60°$, а пото у треугольник AKB — равноугольный и $AB = KA = KB = a$. Укажем, что при вычерчивании следует плоскость S линейного угла $B_1A_1D_1$ заштриховать, этим она более четко выделится на рисунке.

К данному решению не дается рисунок с той целью, чтобы учащийся сам по тексту научился воспроизводить рисунок в определенном масштабе при соблюдении угла сокращения $\varphi = 45°$ и коэфициента сокращения $k = 0,5$.

9. Строим прямой двугранный угол согласно указаниям, данным в задаче 8. Пусть точка A лежит на грани Q, а точка B — на грани P, и пусть проекция AB_1 отрезка AB на плоскость Q равна a, проекция его BA_1 на грань P равна b и проекция B_1A_1 на ребро равна c (рис. 86). Обозначив искомый отрезок AB через x, находим:

из $\triangle AA_1B$: $\quad AA_1^2 = x^2 - b^2$,

из $\triangle AA_1B_1$: $\quad AA_1^2 = a^2 - c^2$.

Из сопоставления полученных равенств имеем:

$$x^2 - b^2 = a^2 - c^2 \quad \text{и} \quad x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}.$$

Надо следить за тем, чтобы учащиеся выполняли построение того или иного геометрического образа в определенной последовательности. Так, в данной задаче строятся в последовательном порядке:

1) плоскость P;

2) плоскость $Q \perp P$;

3) точки A и B в плоскостях P и Q и прямая AB; последнюю следует выделить, отметив ее, положим, красным цветом;

4) проекция B_1A отрезка AB на плоскость Q; для этого следует провести BB_1 перпендикулярно MN — ребру двугранного угла; $B_1A = a$; данную проекцию можно выделить на чертеже цветным мелком;

5) проекция A_1B отрезка AB на плоскость P; для этого проводится $AA_1 \perp MN$, $BA_1 = b$; данную проекцию следует выделить на чертеже каким-либо цветным мелком.

Нужно обратить внимание учащихся на то, что построение дает четыре прямоугольных треугольника: $\triangle AA_1B_1$, $\triangle AA_1B$, $\triangle A_1B_1B$ и $\triangle AB_1B$ и что при решении вопроса были использованы лишь первые два треугольника, хотя могли бы быть использованы последние два треугольника.

10. Строим двугранный угол $PMNQ$ (рис. 87). Пусть прямая AB образует с ребром MN угол $\beta = 45°$. Если провести $BB_1 \perp Q$ и соединить точки B_1 и A, то получим $\angle BAB_1 = \alpha = 30°$ и тогда $BB_1 = \frac{a}{2}$ как катет, лежащий против угла в 30°. Проведя затем $BC \perp MN$ и соединив точку C с точкой B_1, находим $\angle BCB_1 = x$ — искомый линейный угол двугранного угла. Из прямоугольного треугольника BB_1C, в котором $\angle BB_1C = 90°$, имеем: $\sin x = \frac{a}{2b}$, но $BC^2 + CA^2 = a^2$ или $b^2 + b^2 = a^2$, откуда $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$, а потому $\sin x = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $x = 45°$

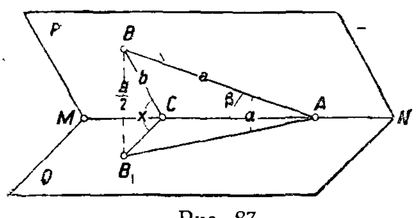


Рис. 87.

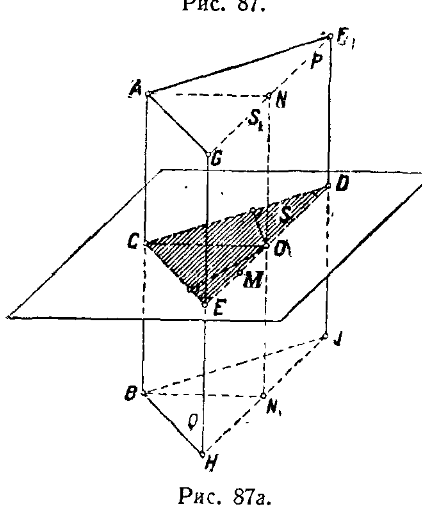


Рис. 87а.

Эту задачу можно решить и геометрически.

Мы нашли, что $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$, из треугольника же BB_1C находим:

$$B_1C = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}.$$

Следовательно, $B_1C = B_1B$, а потому прямоугольный треугольник BB_1C — равнобедренный, значит, $\angle BCB_1 = 45°$.

11. Дан двугранный угол $PABQ$ и внутри его точка M (рис 87а). Если провести через точку M плоскость S, перпендикулярную к ребру AB, то получим линейный угол DCE двугранного угла $PABQ$.

а) Чтобы провести через точку M прямую, образующую с гранями P и Q равные углы, проводим биссектрису CO линейного угла CDE или биссекторную плоскость S_1 (на чертеже плоскость ANN_1B) двугранного угла $PABQ$, имея в виду воспользоваться свойством перпендикуляра к биссектрисе угла, который, как известно, образует со сторонами угла равные углы.

Итак, проводим через данную точку M прямую ED, перпендикулярную к CO. Эта прямая, пересекая сторону CE линейного угла DCE в точке E и сторону CD в точке D, и есть искомая прямая. Действительно, треугольник ECD — равнобедренный и, следовательно, ED образует с гранями данного двугранного угла равные углы, так как проекция DE на грань Q упадет на CE и проекция DE на грань P — на CD, потому что плоскости Q и CDE и плоскости P и CDE взаимно-перпендикулярны.

Изображение рассматриваемого геометрического образа следует вычертить так, чтобы биссекторная плоскость двугранного угла совпала с плоскостью чертежа; при этом условии учащиеся имеют возможность весьма просто установить на чертеже направление перпендикуляра ED, ибо при построении в кабинетной проекции можно принять $\angle COE$ за угол в 45° ($\varphi = 45°$).

б) Плоскость проходящая через точку M и перпендикулярная к CO, будет искомой плоскостью, ибо двугранные углы, образуемые ею с гранями двугранного угла, измеряются соответственно линейными углами CDO и CEO, которые равны.

12. Строим прямой двугранный угол и его линейный угол; последний делим на три равные части и проводим через каждый из лучей, которые делят линейный угол на три равные части, и через ребро двугранного угла соответствующие плоскости; этими плоскостями двугранный угол разделится на три равных двугранных угла.

ГЛАВА VI.

ИЗОБРАЖЕНИЕ ТЕЛ И ИХ СЕЧЕНИЙ В СВЯЗИ С КОСОУГОЛЬНЫМ ПРОЕКТИРОВАНИЕМ НА ПЛОСКОСТЬ. МЕТОДИКА ВОПРОСА.

§ 21. Введение.

1. Особое внимание должно быть уделено построению изображений пространственных фигур на вертикальной плоскости чертежа. Учащимся следует указать общие правила и приемы построения фигур, а также показать и обосновать построение сечений в простейшем из многогранников — в частности в кубе. Такая работа является хорошей подготовкой для уяснения в дальнейшем вопросов стереометрии; работа эта содействует развитию пространственных представлений учащихся и приучает их давать грамотные, четкие чертежи. Чертежи должны выполняться с соблюдением определенных условий в соответствии с принятым масштабом, чтобы можно было по ним восстановить и действительные размеры изображенных фигур и взаимное расположение отдельных их элементов.

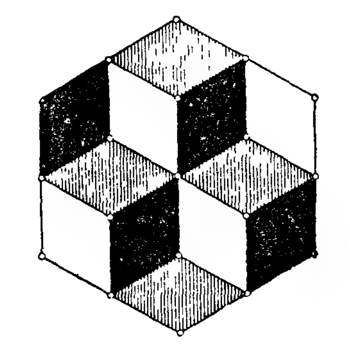


Рис. 88.

Это тем более существенно, что не всегда вывод, делаемый на основании получаемого только одного зрительного впечатления, верен. Стоит, например, посмотреть на рисунок 88, чтобы в этом убедиться. Пристально

рассматривая рисунок, мы видим на нем три куба, при этом в одном случае кажется, что один куб расположен над двумя другими, в другом случае, наоборот, на одном кубе расположены два других куба; повернув же рисунок на 90°, мы увидим или два куба слева и один справа или, наоборот, один куб слева и два куба справа. Кроме того, на том же рисунке усматривается 12 равных ромбов, заполняющих правильный шестиугольник, три правильных шестиугольника и три ромба и т. п.

Приемы, которыми пользуются при вычерчивании пространственных фигур, отчасти были уже рассмотрены в настоящей книге; указания, достаточные для курса средней школы, даны в стабильном учебнике. Можно рекомендовать книгу В. Гордона „Основы технического черчения", Учпедгиз 1935 г., и книгу С. Ю. Калецкого „Черчение с элементами начертательной геометрии", Учпедгиз, 1935 г.

Считаем нужным сделать еще одно указание, касающееся изображения пространственных фигур: целесообразно для усиления впечатления от рисунка вычерчивать линии, удаляющиеся от глаза наблюдателя, с постепенно уменьшающейся их толщиной (рис. 89).

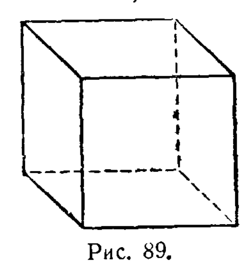


Рис. 89.

2. Приводим перечень теорем о проекциях, которыми приходится пользоваться при вычерчивании пространственных фигур по методу параллельного проектирования; с этими теоремами учащиеся должны быть знакомы.

1) Проекции параллельных отрезков параллельны.

2) Проекции отрезков, параллельных плоскости проекции, проектируются без сокращения; они равны по длине самим отрезкам.

3) Проекции отрезков, перпендикулярных к плоскости чертежа, вообще сокращаются, а прямой угол между данным отрезком и плоскостью деформируется; принято в кабинетной проекции эти отрезки чаще сокращать вдвое, а соответствующий угол в 90° деформировать в угол, равный 45°.

4) Проекции пересекающихся отрезков также пересекаются.

5) Отношение проекций отрезков одного направления равно отношению самих отрезков.

При выполнении чертежа учащиеся должны установить: масштаб, в котором дается изображение фигуры; угол деформирования или сокращения φ для отрезков, перпендикулярных к вертикальной плоскости чертежа (чаще $\varphi = 45°$); отношение k, коэфициента изменения, в котором сокращаются отрезки, перпендикулярные к вертикальной плоскости чертежа (чаще $k = 0{,}5$).

Необходимо обратить внимание учащихся и на то, что плоскость чертежа следует мыслить расположенной вертикально, другими словами, лист, на котором дается изображение фигуры, мыслится прикрепленным к вертикальной стене или к классной доске, причем нижний и верхний края листа должны принять горизонтальное направление, боковые же края листа — вертикальное направление.

§ 22. Система в проработке темы.

1. Работу с учащимися следует начать с вычерчивания прямолинейных фигур, лежащих в горизонтальной плоскости, в следующей последова-

тельности. Вычерчиваются: прямоугольник и квадрат в двух видах: а) одна из сторон параллельна вертикальной плоскости чертежа, б) диагональ параллельна вертикальной плоскости чертежа; параллелограм и ромб в тех же двух видах; треугольник в разных расположениях; трапеция; четырехугольник любой формы; многоугольник любой формы и в любом положении; можно выделить правильные пяти-, шести-, восьми- и десятиугольники, стороны или диагонали которых параллельны вертикальной плоскости чертежа; круг. Указанные построения приведены в стабильном учебнике.

Необходимо требовать от учащихся, особенно вначале, чтобы при каждом рисунке приводилась табличка с указанием масштаба, угла сокращения φ и коэфициента сокращения k, как это показано ниже:

масштаб $1:n$;
$\varphi=45^{\circ}$; $k=0{,}5$.

Эти данные позволяют по данному рисунку непосредственно установить действительные размеры фигуры в направлениях принятых осей.

2. Вычерчивание геометрических тел следует начать с куба. Имеются следующие соображения за то, чтобы возможно раньше приступить к вычерчиванию геометрических тел и в первую очередь куба:

1) учащиеся знакомы с кубом уже по начальной школе, другими словами, задолго до изучения систематического курса геометрии, и, таким образом, куб и отдельные его простейшие свойства им интуитивно известны;

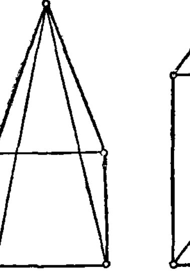
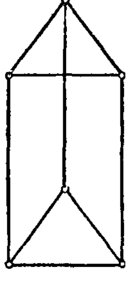


Рис. 90.



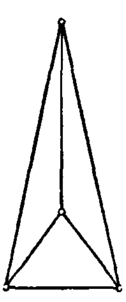


Рис. 91.

Неправильные изображения.

2) необходимо, чтобы учащиеся по возможности рано приобрели навыки „видеть“ пространственные образы и научились изображать их на двумерной плоскости;

3) четкое и правильное построение изображений геометрических тел требует длительных упражнений; когда же учащиеся переходят к вычислению поверхностей и объемов тел, нет времени задерживаться на приобретении навыков в их изображении; к тому же теоретическая сторона отдельных вопросов, относящихся к телам, быстрее выясняется, если учащиеся пользуются правильно и четко выполненными ими самими рисунками.

3. Если на такую проработку и приходится затратить в начале прохождения курса стереометрии довольно много времени (часть фигур учащиеся вычерчивают дома, и лучшие их чертежи вывешиваются в классе или в математическом кабинете), то такая затрата времени в должной мере окупается тем, что учащиеся при наличии навыков в изображении фигур более успешно продвигаются вперед.

Нередко приходится встречаться даже на выпускных испытаниях в старших классах с весьма странными изображениями тел на плоскости: правильная четырехугольная пирамида изображалась, например, так, как

показано на рисунке 90, иначе говоря, учащийся вычерчивал основание пирамиды — квадрат и, взяв вне его произвольную точку, соединял ее с вершинами основания; правильные треугольные призма и пирамида изображались, как показано на рисунке 91. Надо решительно бороться с такого рода неграмотными чертежами. Добиться же выполнения учащимися грамотного чертежа можно при условии своевременного введения при проработке курса геометрии раздела „построение фигур“ и неуклонного требования от учащихся представления четкого и аккуратно выполненного чертежа.

§ 23. Примеры изображений. Построение простейших фигур.

Примерное решение задач на построение.

Задача 1. Построение треугольника.

Треугольник со сторонами $a = 12$ *см*, $b = 10$ *см* и $c = 18$ *см* лежит в горизонтальной плоскости так, что меньшая его сторона параллельна вертикальной плоскости чертежа. Построить изображение треугольника на вертикальной плоскости чертежа, если принять масштаб 1 : 4, $\varphi = 45^\circ$ и $k = 0{,}5$.

Прежде чем приступить к построению требуемого изображения треугольника, надо его построить по трем данным сторонам в соответствии с правилами планиметрии, предварительно исследовав, можно ли построить треугольник по заданным условиям и каков его вид по отношению к его углам.

Убеждаемся, что

$$b < a < c \quad \text{и} \quad c < a + b,$$

а потому треугольник возможен; кроме того

$$c^2 > a^2 + b^2,$$

что указывает на то, что треугольник тупоугольный.

Когда выполнен указанный анализ, строится треугольник; его изображение дано на рисунке 92а в масштабе 1 : 4, т. е. стороны на рисунке соответственно равны 3, 2,5 и 4,5 *см*. Затем вычерчивается, согласно данным выше указаниям, изображение плоскости P с тем, чтобы лучше ориентироваться при выполнении дальнейших построений. На построенной плоскости P следует после этого прежде всего построить „базис“ MN (рис. 92б), параллельный нижнему краю листа, и отложить на нем от какой-нибудь его точки, например точки B, в соответствии с рисунком 92а отрезки $BC = a$ и CD, равный проекции стороны AC на продолжение стороны BC. Далее, зная, что угол сокращения $\varphi = 45^\circ$, нужно провести

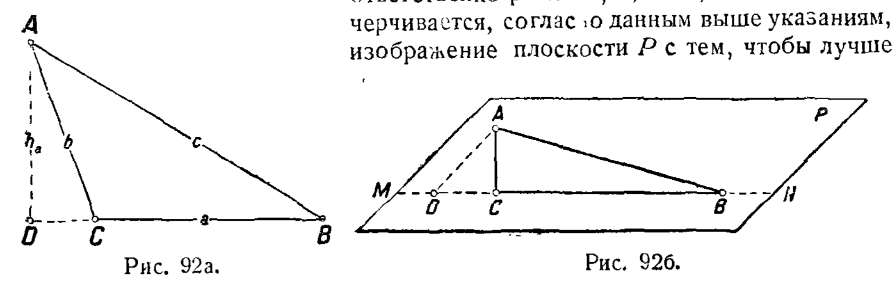


Рис. 92а.

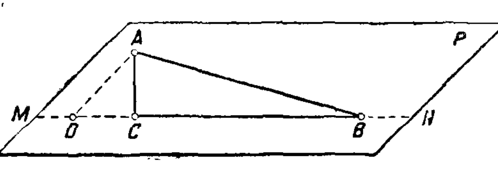


Рис. 92б.

прямую DA, образующую с BC угол в 45°, и на ней отложить отрезок DA, равный половине высоты h_a, так как $k=\frac{1}{2}$; наконец, соединив точку A с концами B и C отрезка BC, получим искомое изображение треугольника ABC.

Для усиления наглядности и четкости рекомендуется прямые углы как в изображении самой фигуры, так и в начерченном изображении плоскости отметить цветным мелом или карандашом одинаковыми по цвету дугами; стороны заданной фигуры вычертить несколько жирнее остальных вспомогательных линий; записать табличку с указанием масштаба, угла φ и коэфициента k сокращения.

Можно при желании заштриховать начерченное изображение искомой фигуры.

Считаем нужным указать, что всякое построение целесообразно использовать для повторения отдельных разделов планиметрии. Так, можно вычислить h_a по формуле

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{2}{12}\sqrt{20\cdot 10\cdot 8\cdot 2}=$$
$$=\frac{2\cdot 10\cdot 4}{12}\sqrt{2}=\frac{20}{3}\sqrt{2}\approx 9{,}4,$$

и тогда на рисунке 92б отрезок AD, в соответствии с коэфициентом сокращения $k=\frac{1}{2}$ и масштабом 1:4, должен приближенно равняться 1,2 *см*; таким образом, вычисление позволяет проверить правильность сделанного построения.

Задача 2. Построение куба.

Куб, ребро которого $a=10$ *см*, поставлен на горизонтальной плоскости так, что передняя грань его параллельна вертикальной плоскости чертежа. Построить изображение куба, если известно, что масштаб 1:4, $\varphi=45°$ и $k=0{,}5$.

На рисунке ребро куба должно равняться, согласно заданному масштабу, $10:4=2{,}5$ *см*.

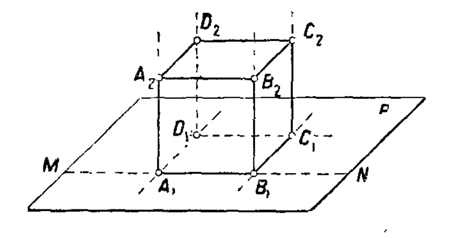


Рис. 93.

Прежде всего строится изображение плоскости P, на которой помещен куб, а затем вычерчивается на ней по известным правилам изображение квадрата основания куба (рис. 93). После этого проводятся с помощью чертежного треугольника в вершинах построенного изображения квадрата $A_1B_1C_1D_1$ прямые, перпендикулярные к нижнему краю изображения плоскости P. На этих перпендикулярах откладывают с помощью циркуля от точек A_1, B_1, C_1 и D_1 отрезки $A_1A_2=B_1B_2=C_1C_2=D_1D_2=a$ — ребру куба; построенные прямые параллельны вертикальной плоскости чертежа, не искажаются и остаются параллельными. Соединив в последовательном порядке точки A_2, B_2, C_2 и D_2, получаем изображение заданного куба в кабинетной проекции.

Для большей четкости чертежа ребра D_1A_1, D_1C_1 и D_1D_2, выходящие из вершины D_1 куба, вычерчиваются пунктиром; ребра передней грани

даются более жирными линиями, нежели остальные; ребра B_1C_1, B_2C_2 и A_2D_2 могут быть вычерчены с постепенным утончением линий.

Когда изображение построено, можно задать учащимся примерно следующие вопросы: 1) какие отрезки — ребра куба — не искажены, 2) какие отрезки — ребра куба — искажены и как, 3) какие углы искажены и как. В последнем случае надо указать на то, что некоторые прямые углы на чертеже, как, например, $\angle A_1D_1C_1 = \angle A_1B_1C_1$, и соответствующие углы верхней грани равны 135°; то же относится и к углам боковых граней, как левой, так и правой. Небесполезно указать учащимся, что хорошо вычерчивать сперва все отрезки пунктиром, а затем провести по пунктирным линиям те линии, которые должны быть сплошными, и, наконец, стереть те части линий, которые для заданного рисунка не нужны.

Задачи на построение.

1. Построить изображение равнобедренной трапеции $ABCD$, в которой $AB \parallel CD$, со сторонами $AB = a = 12$ *см*, $BC = DA = 8$ *см* и $CD = 6$ *см*, если известно, что она расположена на горизонтальной плоскости и диагональ ее BD параллельна вертикальной плоскости чертежа. Масштаб 1:2, $\varphi = 45°$ и $k = 0{,}5$.

2. Построить изображение дельтоида, диагонали которого $d_1 = 12$ и $d_2 = 6$ и бо́льшая из них делится меньшей в отношении 1:2, если известно, что дельтоид расположен на горизонтальной плоскости и меньшая диагональ его параллельна вертикальной плоскости чертежа. Масштаб 1:1, $\varphi = 45°$ и $k = 0{,}5$.

3. Построить изображение куба, ребро которого $a = 8$ *см*, при этом куб поставлен на горизонтальную плоскость так, что диагональ A_1C_1 его основания $A_1B_1C_1D_1$ параллельна вертикальной плоскости чертежа. Масштаб 1:20, $\varphi = 45°$ и $k = 0{,}5$.

Соединить в полученном изображении вершины B_1 и D_1, B_2 и D_2, A_1 и C_1, A_2 и C_2, A_1 и C_2, A_2 и C_1 и указать все отрезки, которые при таком изображении не искажены.

4. Правильный восьмиугольник со стороной $a = 6$ *см* лежит в горизонтальной плоскости так, что меньшая его диагональ параллельна вертикальной плоскости чертежа. Построить его изображение на вертикальной плоскости чертежа. Масштаб 1:1, $\varphi = 45°$ и $k = 0{,}5$.

Указания к задачам.

1. Сперва следует построить с соблюдением масштаба трапецию по правилам планиметрии и провести из вершин A и C перпендикуляры AA_1 и CC_1 к диагонали BD. Затем, приняв за основание диагональ BD с отмеченными на ней основаниями A_1 и C_1 перпендикуляров, выполняют построение согласно указанным выше правилам.

2. Задача сводится к построению двух равнобедренных треугольников с общим основанием 6 и с высотами 4 и 8, составляющими продолжение одна другой.

3. Построение куба дано в стабильном учебнике. Неискаженными будут отрезки A_1C_1, A_2C_2, все боковые ребра и A_1C_2 и A_2C_1 — диагонали куба. Здесь может быть дано определение диагонали куба как отрезка, соединяющего вершины, которые не принадлежат одной грани куба.

4. Сперва следует построить правильный восьмиугольник по правилам планиметрии, затем проводят в нем в последовательном порядке 4 меньшие его диагонали, образующие квадрат, и бо́льшую диагональ, параллельную двум сторонам этого квадрата, после чего строят по известным правилам изображение восьмиугольника.

§ 24. Сечения геометрических тел и их изображения.

1. Большое значение имеет для развития пространственных представлений учащихся построение сечений многогранников, например куба. Приобретенные учащимися знания, скольким и какими элементами

определяется положение плоскости, достаточны, чтобы приступить к построению сечений. Эту работу следует выполнять со всей тщательностью; она в значительной мере способствует тому, что учащиеся научаются лучше видеть и „чувствовать“ пространственные образы, разбираться в самых разнообразных сечениях прямых и плоскостей. Известно, что эта именно сторона до сего времени все же является самым слабым местом в постановке преподавания геометрии в средней школе.

2. Проработку вопроса следует начинать с пересечения двух пересекающихся плоскостей третьей, положение которой определяется тремя точками или прямой и точкой, взятыми на данных плоскостях.

Задача. Плоскости P и Q пересекаются по прямой AB (рис. 94). На плоскости P дана точка K, на плоскости Q — точка L и на линии пересечения AB плоскостей P и Q — точка M. Провести через данные три точки K, L и M сечение S и построить прямые, по которым плоскость S пересечет плоскости P и Q.

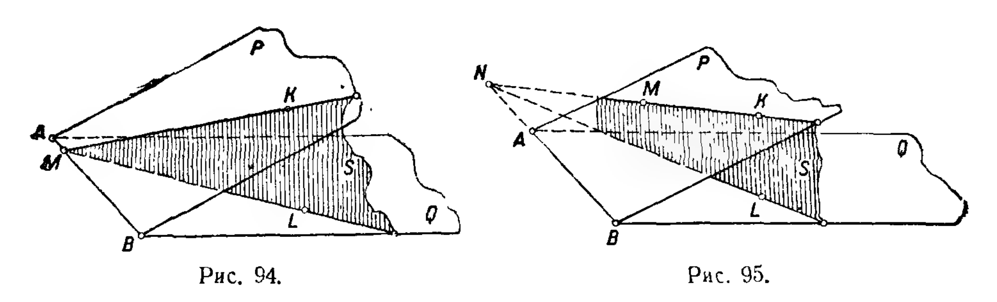


Рис. 94. Рис. 95.

Построение. По условию точки K и M лежат в плоскостях P и S, а потому и прямая KM, соединяющая точки K и M, лежит в обеих плоскостях; по условию точки L и M лежат в плоскостях Q и S, следовательно, прямая LM, соединяющая точки L и M, лежит в обеих плоскостях. Положение искомой плоскости S определяется тремя точками K, L и M, не лежащими на одной прямой. Искомое сечение S на рисунке 94 заштриховано.

Такого же рода задачу следует дать учащимся в несколько усложненном виде; следует задать две из точек, положим точки K и M, а тем самым — и прямую KM в плоскости P, третью же точку L — в плоскости Q (рис. 95).

Для построения искомого сечения проводим в плоскости P прямую KM. Прямые KM и BA лежат в плоскости P и в плоскости S сечения, следовательно, и точка их пересечения N лежит в обеих плоскостях P и S. Эта точка N лежит на прямой BA, которая также принадлежит плоскости Q, а потому точка N лежит и в плоскости Q и в плоскости S; значит, и прямая NL лежит в обеих плоскостях, Q и S, и, таким образом, прямые KM и LN являются теми прямыми, по которым плоскость S сечения пересекает данные плоскости P и Q.

В том случае, когда $KM \parallel BA$ (рис. 96) следует провести в плоскости Q через точку L прямую $LN \parallel KM$; тогда две параллельные прямые KM и LN определят положение секущей плоскости S.

В качестве упражнения можно задать учащимся построение сечения,

если даны две плоскости P и Q, пересекающиеся под прямым или тупым углом.

Если плоскость $P \parallel Q$ и точки K и M лежат в плоскости P (рис. 97), а точка N — в плоскости Q, то проводим в плоскости P прямую MK;

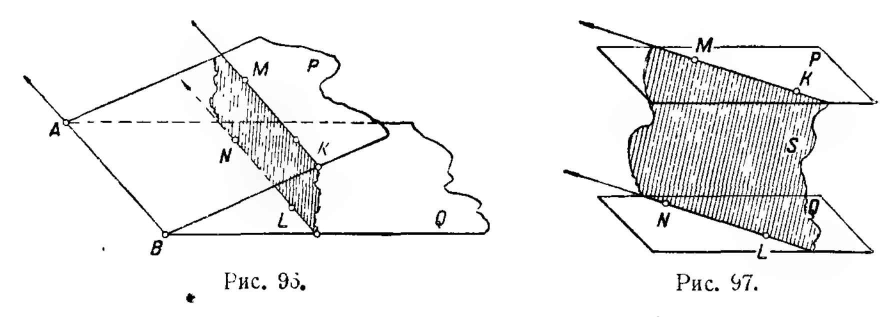


Рис. 96. Рис. 97.

эта прямая принадлежит плоскости S сечения; затем через точку L на плоскости Q и прямую MK проводим плоскость S; она пересечет плоскость Q по прямой LN, параллельной MK и плоскости P.

Анализ фигур, полученных при пересечении двух плоскостей третьей, покажет учащимся, что в одном случае три плоскости, попарно пересекаясь, имеют одну общую точку M и образуют трехгранный угол с вершиной M; в другом случае линии пересечения трех попарно пересекающихся плоскостей параллельны: $MK \parallel NL \parallel AB$, и, таким образом, образуется призматическая поверхность; с такой поверхностью учащиеся уже знакомы по начальному курсу геометрии.

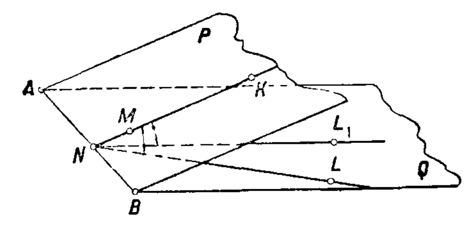
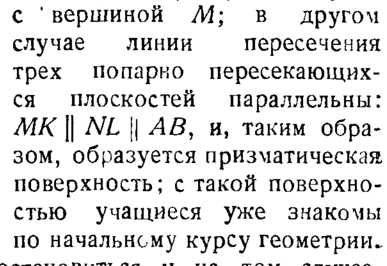


Рис. 98.



Следует остановиться и на том случае, когда точки K и M, взятые на плоскости P, расположены так, что прямая $KM \perp AB$; вращением прямой NL вокруг точки N в плоскости Q (рис. 98) можно привести NL в такое положение NL_1, чтобы NL_1 была перпендикулярна к AB, тогда $\angle KNL_1$ — линейный угол двугранного угла $PABQ$.

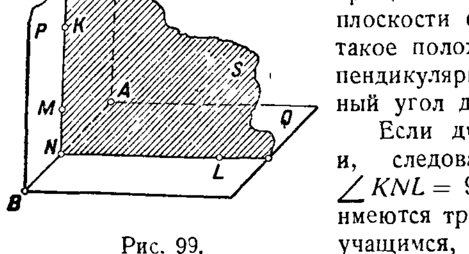


Рис. 99.

Если двугранный угол $PABQ$ — прямой, и, следовательно, линейный угол его $\angle KNL = 90°$ (рис. 99), то при точке N имеются три прямых угла. Не лишне указать учащимся, что при каждой вершине куба имеется по три прямых угла.

3. Когда учащиеся на рассмотренных примерах ознакомились с простейшими построениями сечений, следует перейти к построению сечений в кубе, соблюдая при этом определенную последовательность нарастания трудностей построения.

Учащимся предлагается построить изображение куба, ребро которого $a = 20$ *см*, при масштабе $1:5$, $\varphi = 45°$ и $k = 1:2$, и провести плоскость

через вершины A, D_1 и C — концы ребер DA, DC и DD_1, выходящих из одной вершины D (рис. 100).

Тремя точками однозначно определяется положение плоскости, а потому, соединив прямыми точки A и D_1, A и C, C и D_1, получим сечение куба плоскостью S: это сечение — треугольник D_1AC, его стороны лежат на гранях куба. Полезно предложить учащимся вычислить стороны и углы полученного в сечении треугольника, а также и площадь самого сечения. Каждая из сторон треугольника сечения есть диагональ квадрата — грани куба — и равна $a\sqrt{2}$, следовательно, $\triangle D_1AC$ — равносторонний, и каждый его угол равен 60°. Площадь сечения вычисляется по формуле

$$S_\triangle = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \text{ кв. ед.}$$

Если не изменять положения точек A и C, точку же D_1 перемещать вдоль ребра по направлению к вершине D, то сечение куба плоскостью дает ряд равнобедренных треугольников.

Следует предложить учащимся самостоятельно решить задачу для случая, когда точка D_2 расположена на середине ребра DD_1. Нужно

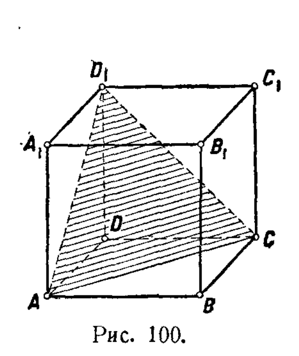


Рис. 100.

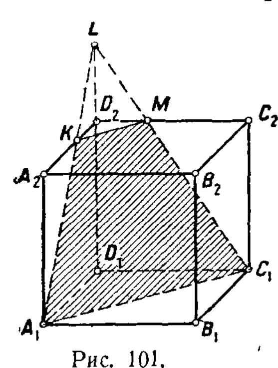


Рис. 101.

проследить вместе с учащимися, что в том случае, когда точка D_1 совпадает с точкой D, плоскость искомого сечения совпадет с плоскостью основания $ABCD$. Учащиеся находят также стороны и площадь сечения, проходящего через середины ребер DA и DC и вершину D_1 (равнобедренный треугольник), и определяют, если они знакомы с тригонометрией, углы треугольника сечения. Учащиеся увидят, что в сечении могут получиться различного вида треугольники по отношению к их углам: и прямоугольные и остроугольные; первые — только в предельном случае, когда D_1 совпадает с D, и тогда, например, $\triangle ACD$ составляет половину основания.

Для самостоятельной проработки учащимся может быть дана задача: на каждом из трех ребер куба, выходящих из одной вершины, взято по одной точке, K, L и M; построить сечение, проходящее через эти три точки.

Задача. Дан куб, требуется провести сечение через вершины A_1 и C_1 куба и точку K на ребре A_2D_2 (рис. 101).

Прямые A_1C_1 и A_1K принадлежат плоскости сечения, так как, по условию, точки A_1, C_1 и K должны лежать в плоскости сечения. Плоскость сечения пересекает плоскость нижней грани куба по прямой A_1C_1, а плоскость верхней грани куба она должна пересечь по прямой KM, параллельной A_1C_1, а потому, проведя $KM \parallel A_1C_1$, получаем еще одну точку M на ребре D_2C_2, принадлежащую плоскости сечения; следовательно, и MC_1 принадлежит плоскости сечения. Прямые A_1C_1, A_1K, KM и MC_1 лежат на гранях куба и образуют четырехугольник A_1C_1MK сечения куба плоскостью, проходящей через данные три точки A_1, C_1 и K.

Полученный в сечении четырехугольник — трапеция, у которой $A_1C_1 \parallel KM$, и притом равнобедренная; из равенства прямоугольных треугольников A_1D_1L и C_1D_1L, имеющих общий катет D_1L и равные катеты A_1D_1 и D_1C_1, следует, что $A_1L = C_1L$, а потому треугольник A_1LC_1 — равнобедренный, следовательно, и трапеция A_1C_1MK — равнобедренная.

После разбора этой задачи можно предложить учащимся провести в кубе сечение через вершины A_2 и B_1 и середину K ребра C_1C_2 и вычислить стороны полученной в сечении трапеции и площадь сечения, если известно, что ребро куба равно a.

Задача. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через его вершины D_2 и B_1 и точку K, взятую на ребре C_1C_2 (рис. 102).

Проводим прямые B_1K и D_2K; они принадлежат, согласно условию, плоскости сечения.

Точка L пересечения прямых B_2C_2 и B_1K принадлежит плоскости сечения S, плоскости правой грани и плоскости верхней грани куба.

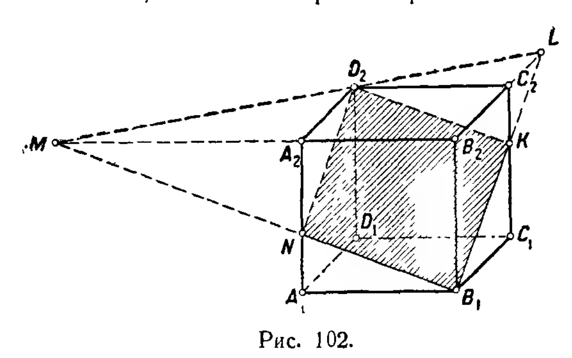


Рис. 102.

Прямая LD_2 принадлежит плоскости сечения S и плоскости верхней грани куба, и точка пересечения M прямых LD_2 и B_2A_2 принадлежит плоскости сечения S, плоскости верхней грани и плоскости передней грани куба; следовательно, прямая MB_1 принадлежит передней грани куба и плоскости сечения S и отрезок NB_1 есть линия пересечения плоскости сечения S с передней гранью куба, и четырехугольник NB_1KD_2 — искомое сечение S.

Если использовать теорему о параллельных плоскостях, то построение значительно упрощается. В самом деле, проведя прямые B_1K и KD_2, проводим $D_2N \parallel KB_1$ и соединяем затем точку N с точкой B_1, тогда и $NB_1 \parallel D_1K$ и четырехугольник B_1KD_2N — параллелограм.

Если взять точку K на середине ребра C_1C_2, то получится ромб; если же точка K совпадет с вершиной C_2 куба, то получаемый в сечении четырехугольник обратится в прямоугольник, который и будет диагональным сечением куба.

Если, наконец, данные три точки совпадают с серединами трех боковых ребер, то в сечении получится квадрат, равный основанию куба.

Соответствующим подбором положения трех точек на ребрах куба можно получить в сечении, как было показано, всевозможные четырехугольники. Четырехугольник может получиться в сечении только при условии, что плоскость сечения пересекает четыре грани куба; поэтому ясно, что, по крайней мере, две противолежащие стороны четырехугольника сечения будут параллельны, ибо, по крайней мере, две из четырех любых граней куба параллельны, следовательно, сечение куба плоскостью может дать следующие четырехугольники: трапецию, параллелограм, прямоугольник, ромб и квадрат.

Задача. Дан куб $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$. Провести сечение через его вершину A_1, точку K на ребре A_2D_2 и точку L на ребре B_1C_1 (рис. 103).

Прямые A_1K и A_1L принадлежат плоскости сечения. Проводят затем $KM \parallel A_1L$ и $LN \parallel A_1K$, тогда отрезок NM на задней грани куба замыкает контур сечения.

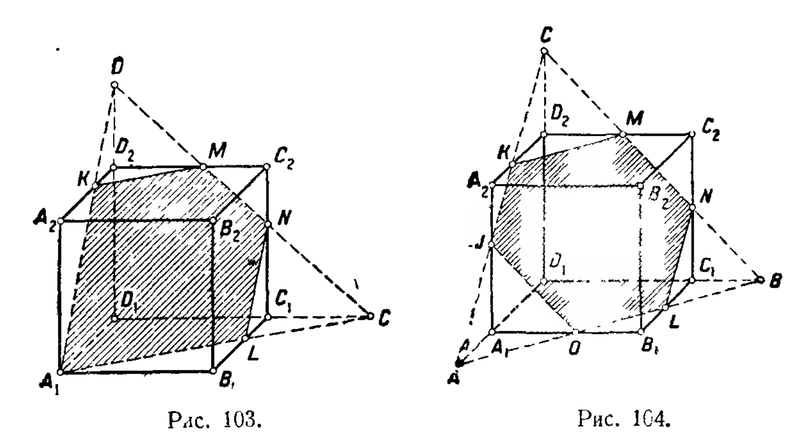


Рис. 103. Рис. 104.

Следует рассмотреть и случай, когда плоскость сечения пересекает все шесть граней куба, и сечение куба — шестиугольник.

Задача. Дан куб $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ и точки K, L и O на его ребрах A_2D_2, B_1C_1 и A_1B_1. Провести через эти три точки сечение (рис. 104).

Проводим прямую OL, она лежит в плоскости сечения S и в плоскости нижнего основания куба.

Прямые OL и A_1D_1 лежат в одной плоскости, следовательно, в ней лежит и точка их пересечения A. Итак, точка A принадлежит плоскости нижнего основания куба, плоскости сечения S и плоскости левой боковой грани куба.

Прямая AK принадлежит и плоскости левой боковой грани куба и плоскости сечения S, и отрезок JK — одна из сторон искомого сечения; точно так же и отрезок JO на передней грани куба — сторона искомого сечения S.

Когда найдены три стороны OL, JK и JO сечения S, то остальные его стороны получаются, если провести $OL \parallel KM$, $NL \parallel JK$ и $MN \parallel JO$ или же соединить в последнем случае точки N и M.

4. Рассматривая сечения, изображенные на рисунках 100, 101, 102, 103 и 104, мы видим, как то или иное положение заданных на гранях куба трех точек влияет на форму сечения. Так, сечение, полученное при расположении трех заданных точек на концах ребер, выходящих из одной вершины куба (рис. 100), переходит из треугольника в четырехугольник, пятиугольник или шестиугольник по мере того, как одна, две или все три первоначально заданные точки перемещаются вдоль соответствующих ребер куба. Так, если в сечении, данном на рисунке 100, переместить точку D_1 выше по ребру DD_1, то сечение примет форму, данную на рисунке 101; если затем в сечении, изображенном на рисунке 101, переместить точку C_1 по ребру C_1B_1 по направлению к точке B_1, то сечение примет форму, данную на рисунке 103; если, наконец, в сечении, показанном на рисунке 103, переместить точку A_1 по ребру A_1B_1 по направлению к точке B_1, в точку O, то сечение переходит в шестиугольник (рис. 104).

Итак, при пересечении куба плоскостью можно получить или треугольник, или четырехугольник, или пятиугольник, или шестиугольник. Понятно, что при пересечении куба плоскостью нельзя получить многоугольник, число сторон которого больше шести, так как у куба всего шесть граней.

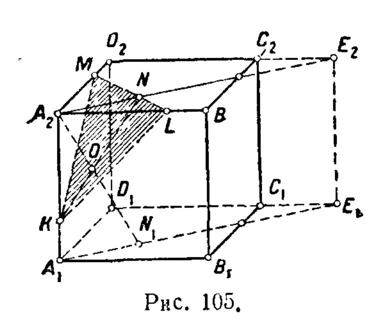


Рис. 105.

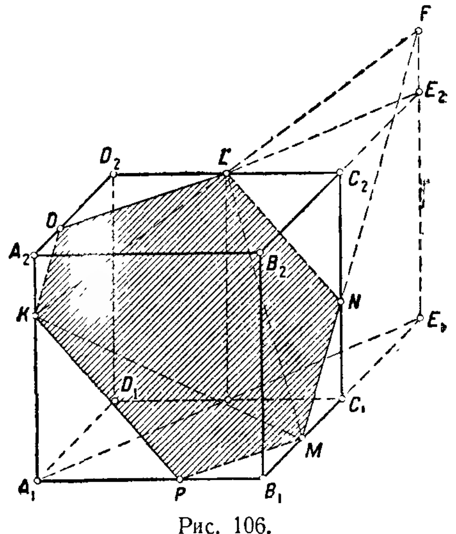


Рис. 106.

Можно предложить учащимся построить сечение, проходящее через три точки K, L и M, взятые на серединах каких-либо ребер куба, не являющихся сторонами одной грани, доказать, что полученный в сечении шестиугольник — правильный и вычислить его площадь, если известно, что ребро куба равно a. Решение дано в стабильном учебнике.

Задача. Даны куб и сечение куба KLM. На основании куба дана точка N_1. Найти построением точку пересечения плоскости треугольника KLM с прямой A_2N_1 (рис. 105).

Проводим через точки A_1, A_2 и N_1 плоскость $A_2A_1E_1E_2$; она пересечет плоскость верхней грани куба по прямой $A_2E_2 \parallel A_1N_1$ и плоскость задней грани по прямой $E_1E_2 \parallel A_1A_2$; понятно, что в полученной плоскости лежат и прямая A_2N_1 и искомая точка пересечения прямой A_2N_1 с плоскостью KLM. Точка N пересечения прямых A_2E_2 и ML принадлежит плоскости верхнего основания куба, плоскости сечения KLM и плоскости

$A_2A_1E_1E_2$; значит, и прямая KN принадлежит плоскости сечения KLM и плоскости $A_2A_1E_1E_2$, а потому точка O пересечения прямых KN и A_2N_1 — искомая точка.

Следует остановиться еще на задаче: построить сечения куба, если точки K, L и M расположены на ребрах куба так, что ни одна из прямых KL, KM и LM не лежит на какой-либо грани куба (рис. 106). Разбор и решение этой задачи даны в стабильном учебнике.

Видоизменяя условия рассмотренных выше задач, преподаватель имеет достаточно разнообразный материал для составления задач. Необходимо только всегда предварительно весьма тщательно просмотреть каждый из задаваемых учащимся вопросов.

§ 25. Метрические зависимости между элементами фигур и их проекциями.

Проекция угла на плоскость.

1. Геометрические фигуры изображаются методом проекционного черчения. Указания о методе проекционного черчения, необходимые для целей средней школы, даны в стабильном учебнике, где приводятся построения проекций некоторых тел на одну, две и три плоскости. Более подробные сведения о проекционном черчении и методические указания можно найти в любом учебнике проекционного черчения, например в упомянутых уже книгах В. Гордона и С. Ю Калец ого.

В настоящей книге остановимся лишь несколько подробнее на проекциях угла и плоской фигуры на плоскость.

Проекцией угла на плоскость называется угол, образуемый направлениями проекций его сторон.

Если плоскость проектируемого угла параллельна плоскости проекций, то проекция угла равна самому углу: необходимо указать, что проекция угла может быть и больше и меньше проектируемого угла; в данном случае нет полной аналогии с проекциями отрезков, которые не могут оказаться больше проектируемого отрезка.

Теорема. **Если из внешней точки A проведены к плоскости P две равные наклонные AB и AC, то угол, образуемый этими наклонными, меньше угла, образуемого направлениями их проекций на данную плоскость P.**

Следует указать учащимся, что с понятием о наклонной всегда связано понятие о перпендикуляре, поэтому надлежит при вычерчивании наклонной проводить прежде всего перпендикуляр из той же точки, из которой проводится наклонная; нужно также иметь в виду, что, прежде чем строить наклонные, следует провести на плоскости проекции наклонных.

Так, в данной задаче проекции наклонных равны, ибо по условию равны наклонные.

Приступая к решению задачи, надо построить изображение плоскости P и из внешней точки A провести к плоскости P перпендикуляр AO, равные проекции OC и OB, $OC = OB$, и, наконец, наклонные AB и AC (рис. 107). Соединив точки B и C, получим равнобедренный треугольник BOC, который является проекцией равнобедренного треугольника BAC. Требуется доказать, что $\angle BAC < \angle BOC$.

Высота AD треугольника BAC проходит через середину D стороны BC. Если повернуть треугольник BAC вокруг стороны BC так, чтобы

плоскость его совпала с плоскостью P, то получающаяся при этом фигура $BOCA_1$ — дельтоид, так как $BO = OC$ и $A_1B = A_1C$ и диагонали его BC и OA_1 взаимно-перпендикулярны; диагональ OA_1 является вместе с тем осью симметрии: $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$.

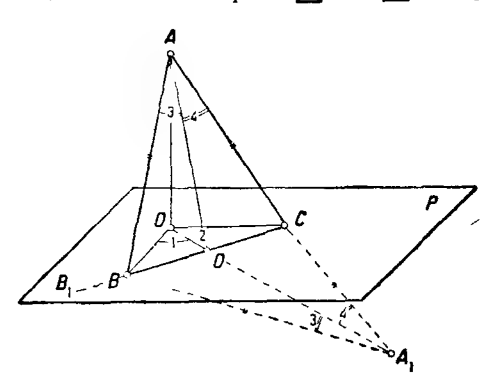


Рис. 107.

Рассмотрим треугольник OCA_1; в нем $OC < CA_1$, ибо $OC < AC$, а $AC = CA_1$; следовательно, $\angle 2 > \angle 4$. Так же и $\angle 1 > \angle 3$, а потому $\angle 1 + \angle 2 > \angle 3 + \angle 4$, следовательно, $\angle BOC > \angle BA_1C$, но $\angle BA_1C = \angle BAC$, а потому $\angle BOC > \angle BAC$.

В случае, если обе наклонные AB и AC лежат в одной плоскости, перпендикулярной к плоскости P, т. е. в одной плоскости с перпендикуляром AO, угол, образуемый проекциями наклонных BD и BC, равен $180°$; ясно, что $\angle BAC < 180°$.

2. Рассмотрим на том же рисунке 107 угол OBD — проекцию угла ABD. Треугольники ABD и OBD — прямоугольные, вершины D прямых углов этих треугольников совпадают, а потому

$$\angle OBD + \angle DOB = 90° = \angle ABD + \angle DAB,$$

но $\angle DOB > \angle DAB$ или $\angle 1 > \angle 3$, как доказано выше, а потому $\angle OBD < \angle ABD$, т. е. $\angle OBD$ — проекция угла ABD — меньше самого угла ABD.

Если взять внешний угол ABB_1 треугольника ABC, то его проекцией будет $\angle OBB_1$, но

$$\angle ABB_1 + \angle ABD = 2d = \angle OBB_1 + \angle OBD.$$

По доказанному $\angle ABD > \angle OBD$, а потому $\angle ABB_1 < \angle OBB_1$, т. е. угол OBB_1 — проекция угла ABB_1 — больше самого угла ABB_1.

3. Особое внимание следует уделить проекции прямого угла.

***Теорема.* Если хотя бы одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций или лежит в ней, то проекция прямого угла — тоже прямой угол.**

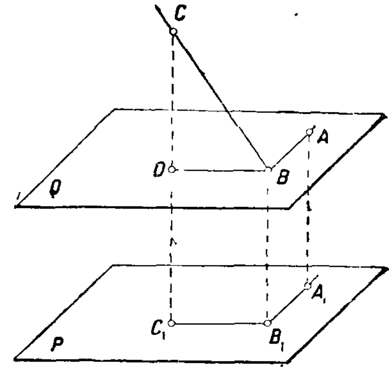


Рис. 108.

Пусть дан прямой угол ABC, сторона которого $AB \parallel P$ (рис. 108). Проводим через сторону AB угла ABC плоскость $Q \parallel P$ и проектируем угол ABC на плоскость P; тогда BA перпендикулярна к OB на основании теоремы о трех перпендикулярах и $\angle ABO$ — проекция угла AB на плоскость Q — прямой угол. Отсюда следует, что и угол $A_1B_1C_1$ — проекция угла ABC на плоскость P — прямой.

Не трудно доказать и обратные теоремы: 1) **если хотя бы одна из сторон проектируемого угла параллельна плоскости проекций и проекция этого угла на плоскость — прямой угол, то и проектируемый угол — прямой**, и 2) **если проекция прямого угла на плоскость проекций — также прямой угол, то, по крайней мере, одна из его сторон параллельна плоскости проекций.**

Проекция плоской фигуры на плоскость.

1. Следует рассмотреть зависимость между площадью плоской фигуры и площадью ее проекции на данную плоскость.

Предварительно необходимо напомнить учащимся о зависимости между длиной отрезка AB, длиной его проекции A_1B_1 на плоскость и косинусом угла α, образуемого направлением самого отрезка и его проекцией, и записать эту зависимость формулой: $A_1B_1 = AB \cdot \cos\alpha$. Формула указывает, что **длина проекции отрезка на плоскость равна длине проектируемого отрезка, умноженной на косинус угла между направлениями отрезка и его проекции.**

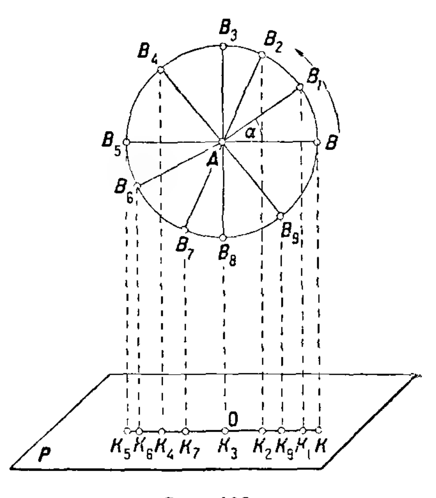


Рис. 109.

Следует при этом рассмотреть, чему равна проекция отрезка при любом значении угла α. Для этого удобнее всего расположить рассматриваемый отрезок в плоскости, параллельной вертикальной плоскости чертежа и, следовательно, перпендикулярной плоскости проекций.

Пусть дан отрезок AB и плоскость проекций P (рис. 109). Вращая отрезок AB вокруг его конца A по направлению, противоположному движению часовой стрелки, и строя проекции отрезка для каждого его нового положения, записываем зависимость между отрезком AB, его проекцией и косинусом угла, образуемого отрезком и его проекцией.

Когда отрезок AB перешёл в положение AB_1 и образует угол α с направлением его проекции OK_1, имеем $OK_1 = AB \cdot \cos\alpha$. С увеличением угла α от 0° до 90° $\cos\alpha$ уменьшается, следовательно, уменьшается и длина проекции отрезка. При $\alpha = 90°$, $\cos\alpha = \cos 90° = 0$ отрезок проекции обращается в точку и длина его равна нулю:

$$OK_3 = AB_3 \cdot \cos 90° = AB_3 \cdot 0 = 0.$$

Такой разбор позволяет проследить, как изменяется проекция радиуса круга на его диаметр при различных значениях угла α, и ввести понятие о направлении отрезка OK от центра в одну сторону и OK_5 — от центра в другую сторону. Следует отметить, что вращательному движению точки B по окружности соответствует колебательное прямолинейное движение ее проекции по прямой KK_5.

2. Переходя к рассмотрению проекций плоских фигур, следует начать с рассмотрения треугольника, одна из сторон которого параллельна

плоскости проекций. Помимо разбора, имеющегося в стабильном учебнике, приводим здесь несколько иной разбор.

Пусть сторона AB треугольника ABC параллельна плоскости проекций P (рис. 110). Проводим через AB плоскость $Q \parallel P$ и спроектируем треугольник ABC на плоскость Q. Если CD — высота $\triangle ABC$, то проекция этой высоты OD — высота $\triangle OAB$. Обозначив угол CDO, линейный угол двугранного угла $CABO$, образуемого плоскостью треугольника ABC и плоскостью Q, через α, имеем: $\frac{OD}{CD} = \cos\alpha$; но площ. $ABC = \frac{1}{2} AB \cdot CD$ и площ $ABO = \frac{1}{2} AB \cdot OD$, а потому $\frac{\text{площ. } ABC}{\text{площ. } ABO} = \frac{CD}{OD} = \frac{1}{\cos\alpha}$ и площ. $ABO =$ площ. $ABC \cdot \cos\alpha$.

С другой стороны, $\triangle ABO = \triangle A_1B_1C_1$, следовательно, площ. $A_1B_1C_1 =$ площ. $ABC \cdot \cos\alpha$.

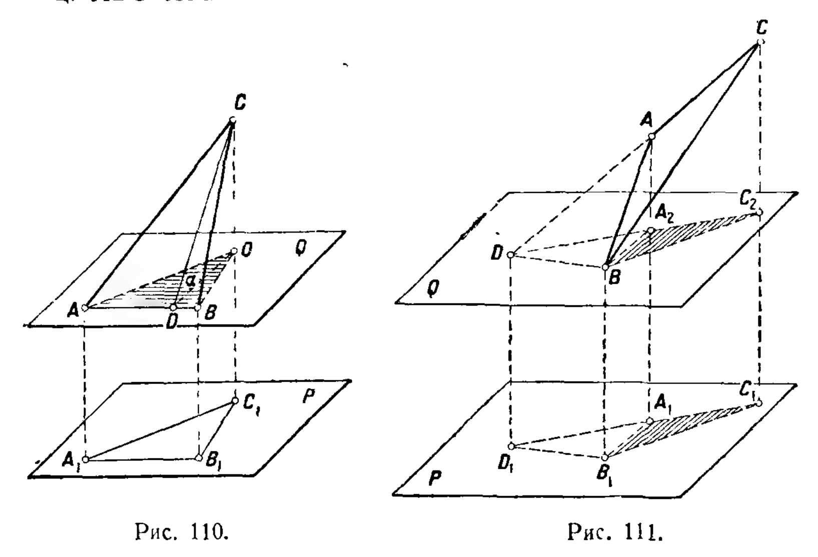


Рис. 110. Рис. 111.

Если ни одна из сторон $\triangle ABC$ не параллельна плоскости P (рис. 111), то проводим через вершину B треугольника ABC плоскость $Q \parallel P$, продолжим сторону CA до пересечения с плоскостью Q в точке D и, наконец, соединим точку D с точкой B. В таком случае треугольники CDB и CAB лежат в одной плоскости, и плоскости их наклонены к плоскости Q, а следовательно, и к плоскости P под одним и тем же углом α; значит,

$$\text{пл. } C_1D_1B_1 = \text{пл. } CDB \cdot \cos\alpha,$$
$$\text{пл. } A_1D_1B_1 = \text{пл. } ADB \cdot \cos\alpha,$$

откуда

$$\text{пл. } C_1D_1B_1 - \text{пл. } A_1D_1B_1 = (\text{пл. } CDB - \text{пл. } ADB) \cdot \cos\alpha,$$

или

$$\text{пл. } A_1B_1C_1 = \text{пл. } ABC \cdot \cos\alpha.$$

Итак, **площадь проекции треугольника равна площади проектируемого треугольника, умноженной на косинус угла, образуемого плоскостью треугольника и плоскостью его проекции.**

Следует рассмотреть случай, когда $\alpha = 0$, следовательно, $\cos\alpha = \cos 0 = 1$; в этом случае плоскость треугольника параллельна плоскости проекций, и площади треугольника и его проекции равны; если же $\alpha = 90^\circ$, то $\cos\alpha = \cos 90^\circ = 0$, и проекция треугольника обращается в отрезок, ибо треугольник лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости проекций, и площадь проекции треугольника равна нулю.

3. Переход от треугольника к многоугольнику не представляет затруднений, ибо многоугольник может быть разбит диагоналями на треугольники, к каждому из которых применима полученная теорема, а потому сумма площадей проекций треугольников равна сумме площадей проектируемых треугольников, умноженной на косинус угла, образуемого плоскостью многоугольника и плоскостью его проекции.

Следует заметить, что площадь проекции любой плоской фигуры, ограниченной любым контуром, равна площади фигуры, умноженной на косинус угла, образуемого плоскостями фигуры и ее проекции.

В самом деле, любая фигура может быть разбита на треугольники или многоугольники, для которых теорема верна, а потому она верна и для суммы площадей всех этих фигур и в пределе — для криволинейной плоской фигуры.

Необходимо указать учащимся на практическое применение сделанного вывода при вычислении поверхности крыши строения, если все скаты крыши наклонены к горизонту под одним и тем же углом. При этом условии нужно площадь основания строения разделить на косинус угла наклона скатов крыши, чтобы получить ее площадь; надо заметить, что углы скатов крыши зависят от материала, из которого сделана крыша.

ГЛАВА VII.

МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ. МЕТОДИКА ВОПРОСА.

§ 26. Трехгранный угол.

1. Для четкого усвоения учащимися понятия о трехгранном угле необходимо предварительно рассмотреть всевозможные взаимные расположения трех плоскостей и иллюстрировать эти положения соответствующими моделями и чертежами (рис. 112; I—IV). Рассматриваются: 1) три параллельные плоскости (I); они, понятно, не имеют ни одной общей точки; 2) две параллельные плоскости (II), пересекаемые третьей; последняя плоскость имеет с каждой из параллельных плоскостей по одной общей прямой, которые параллельны; кроме того, при таком взаимном положении плоскостей образуются 8 двугранных углов, 4 пары противоположных и 8 пар смежных углов; в данном случае желательно провести аналогию с углами, образуемыми на плоскости пересечением двух параллельных прямых секущей; 3) три плоскости, проходящие через одну прямую; они пересекаются по прямой (III); 4) три плоскости, пересекающиеся по трем параллельным прямым (IV); они образуют призматическую поверхность; 5) три плоскости, попарно пересекающиеся и имеющие одну общую точку (рис. 113).

В этом последнем случае пространство делится тремя плоскостями на 8 областей, каждая из которых называется ***трехгранным углом.***

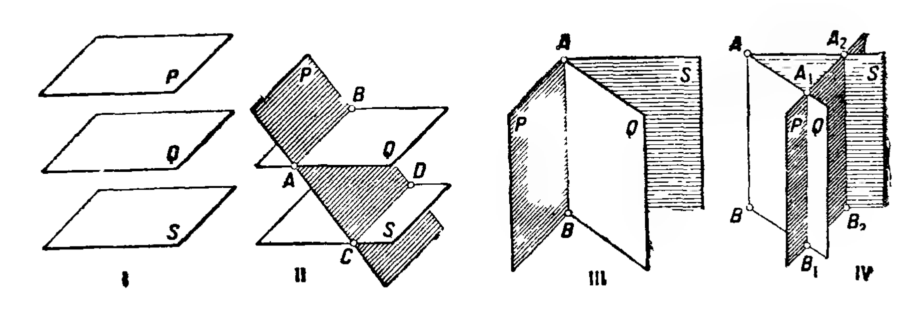


Рис. 112.

Полученные таким построением 8 трехгранных углов имеют общую вершину O — точку пересечения трех плоскостей; прямые, по которым пересекаются плоскости, называются *ребрами* трехгранного угла; трехгранный угол обычно обозначается четырьмя буквами: на первом месте ставится буква, стоящая у вершины угла, а затем пишутся три буквы, отмечающие в последовательном порядке ребра трехгранного угла; так, угол $OBCE$ (рис. 114а) — трехгранный угол; при вычерчивании трехгранного угла следует для большей четкости рисунка отмечать каждую из плоскостей, образующих трехгранный угол, особой штриховкой, как это показано на рисунке 114б. Плоскость, определяемая направлениями каждой пары ребер, называется *гранью* трехгранного угла; так, гранями трехгранного угла $OBCE$ служат грани BOC, COE и EOB; углы при вершине трехгранного угла, образуемые двумя его ребрами, называются *плоскими* углами при вершине трехгранного угла. Каждые две грани трехгранного угла образуют двугранный угол, ребро которого является одновременно ребром трехгранного угла; число двугранных углов равно числу ребер; так, трехгранный угол $OBCE$ (рис. 113) имеет три двугранных угла: Q_1OBP_2, Q_1OCS и S_1OEP_2. Трехгранный угол обозначается на рисунке обычно только тремя его ребрами; на рисунке 114б дан трехгранный угол $OBCE$.

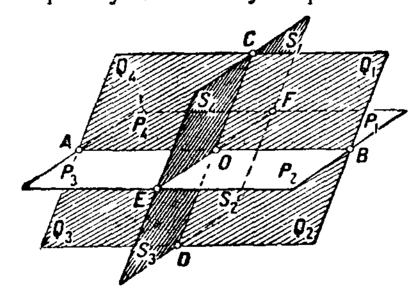


Рис. 113.

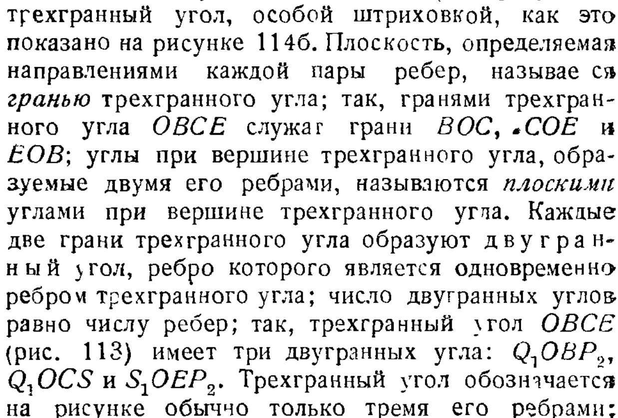


Рис. 114а.

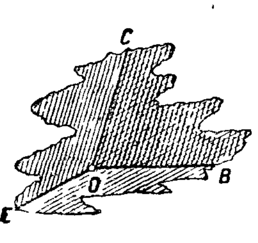


Рис. 114б.

2. Трехгранный угол называется *правильным*, если плоские его углы равны и двугранные его углы равны. Три взаимно-перпендикулярные плоскости образуют 8 правильных трехгранных углов; трехгранный угол называется *прямоугольным*, если его плоские углы прямые и двугранные его углы прямые; так, в кубе 8 прямоугольных трехгранных углов, по числу его вершин; 12 двугранных углов, соответственно числу его ребер; моделями прямоугольных трехгранных углов являются трехгранные углы

комнаты, прямоугольного ящика, кирпича и т. д. Косые трехгранные углы встречаются в кристаллах.

При вычерчивании прямоугольного трехгранного угла следует начертить сперва прямоугольник или квадрат $ABCD$ (рис. 115), провести к плоскости последнего через одну из его вершин, положим D, перпендикуляр DE, а затем провести плоскости P и Q через прямые DE и DC и прямые DE и DA: при таком построении $P \perp S$ и $Q \perp S$, где S — плоскость прямоугольника или квадрата $ABCD$, и полученный трехгранный угол $OPQS$ — прямоугольный и правильный.

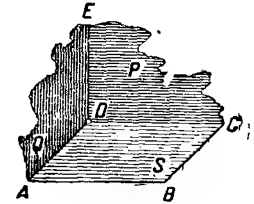


Рис. 115.

Если отметить на ребрах трехгранного угла $OKLM$ точки A_1, B_1 и C_1 и провести через них плоскость сечения (рис. 116), то сечение есть треугольник $A_1B_1C_1$, построением такого сечения более рельефно выделяются ребра и грани трехгранного угла. Понятно, что всякое сечение трехгранного угла, параллельное плоскости треугольника $A_1B_1C_1$, например сечение $A_2B_2C_2$ или $A_3B_3C_3$ и т. д., — тоже треугольники: они подобны треугольнику $A_1B_1C_1$ и их площади возрастают по мере удаления сечений от вершины O трехгранного угла.

3. Следует отдельно рассмотреть сечение, проходящее через точки A, B и C (рис. 117), взятые на ребрах трехгранного угла на одинаковом

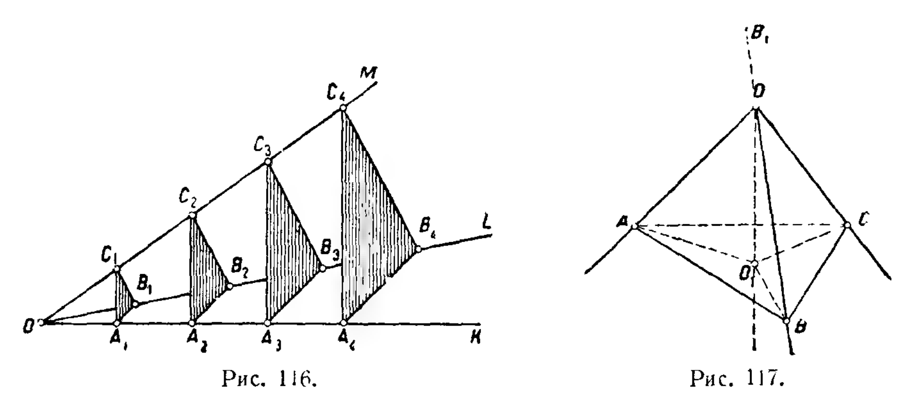


Рис. 116. Рис. 117.

расстоянии от его вершины O, $OA = OB = OC$. При таком построении отрезки OA, OB и OC — равные наклонные, проведенные из точки O, лежащей вне плоскости треугольника ABC, проекции $O_1A = O_1B = O_1C$ этих наклонных равны, и точка O_1 — проекция вершины O на плоскость ABC — есть центр окружности, проходящей через точки A, B и C; прямая OO_1 называется *осью* трехгранного угла, так как при полном повороте трехгранного угла вокруг оси OO_1 его ребра снова занимают прежнее свое положение.

§ 27. Плоские углы трехгранного угла.

1. Прежде чем перейти к рассмотрению свойств плоских углов трехгранного угла, целесообразно предложить учащимся составить трехгранные углы, пользуясь моделями трех плоских углов; тем самым подводят учащихся к выяснению тех условий, которым должны удовлетворять

плоские углы трехгранного угла. В последовательном порядке предлагается учащимся составить трехгранный угол, если в каждом отдельном случае даны следующие три плоских угла: 50°, 60° и 80°; 40°, 50° и 90°; 30°, 40° и 80°; 100°, 120° и 140°; 120°, 130° и 140°.

Построение по данным плоским углам первой задачи убеждает учащихся в возможности построения трехгранного угла. Данные плоские углы второй задачи не позволяют построить трехгранный угол: углы в 40° и 50° полностью покрывают третий угол в 90°. Данные в третьей задаче плоские углы в 30° и 40° не покрывают третьего угла в 80° и не образуют трехгранного угла. Указанные в четвертой задаче плоские углы при попытке образовать трехгранный угол не дают его, так как полностью покрывают собой всю область вокруг общей их вершины. Заданные в пятой задаче плоские углы таковы, что даже перекрывают собой всю область вокруг их общей вершины. Такой разбор возможности построения трехгранного угла по заданным трем плоским углам должен убедить учащихся в том, что трехгранный угол можно построить только при соблюдении двух условий, а именно: 1) каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других углов и 2) сумма всех плоских углов трехгранного угла меньше 360°.

2. После такого разбора следует перейти к доказательству соответствующих теорем о плоских углах трехгранного угла; доказательство их приведено в стабильном учебнике. Приводим здесь другое доказательство; понятно, что с учащимися следует рассмотреть только одно из данных доказательств.

Теорема. **Сумма плоских углов при вершине трехгранного угла меньше** $4d$.

Доказательство. Пусть дан трехгранный угол $OABC$ (рис. 117). Отложим от вершины его O на ребрах угла равные отрезки $OA = OB = OC$, а затем проведем через точки A, B и C плоскость, которая в сечении с трехгранным углом даст треугольник ABC. Проведя еще OO_1 перпендикулярно к плоскости ABC, находим: $O_1A = O_1B = O_1C$, к к проекции равных наклонных, и O_1 — центр окружности, проходящей через вершины A, B и C треугольника ABC. Согласно теореме: если из внешней точки O проведены к плоскости P две равные наклонные OA и OB, то угол, образуемый этими наклонными, меньше угла, образуемого направлениями их проекций на данную плоскость P, имеем:

$$\angle AOB < \angle AO_1B,$$
$$\angle BOC < \angle BO_1C,$$
$$\angle COA < \angle CO_1A,$$

а потому

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COA < \angle AO_1B + \angle BO_1C + \angle CO_1A,$$

или

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COA < 4d,$$

т. е.

сумма плоских углов при вершине трехгранного угла меньше $4d$.

Если продолжить ребро OB за вершину O (рис. 117), то получится другой трехгранный угол OB_1AC; согласно доказанному

$$\angle B_1OA + \angle B_1OC + \angle AOC < 4d,$$

но так как

$$\angle B_1OA = 2d - \angle AOB$$

и

$$\angle B_1OC = 2d - \angle BOC,$$

то

$$2d - \angle AOB + 2d - \angle BOC + \angle AOC < 4d$$

или

$$\angle AOC - (\angle AOB + \angle BOC) < 0,$$

или

$$\angle AOC < \angle AOB + \angle BOC.$$

Также и

$$\angle BOA < \angle BOC + \angle COA$$

и

$$\angle COB < \angle COA + \angle AOB.$$

Отсюда заключаем: **каждый плоский угол при вершине трехгранного угла меньше суммы двух остальных.**

Из приведенных выше неравенств следует, что

$$\angle AOC - \angle AOB < \angle BOC,$$
$$\angle BOA - \angle BOC < \angle COA,$$
$$\angle COB - \angle COA < \angle AOB,$$

т. е. каждый плоский угол при вершине трехгранного угла больше разности двух остальных углов.

Мы не приводим доказательства, приводимого в учебниках геометрии Давыдова и Киселева, так как в школьной программе по геометрии опущена теорема о двух треугольниках с равными сторонами и неравными между ними углами, на которой в указанных учебниках строится доказательство. Следует, кроме того, еще указать, что такое доказательство, как показывает опыт, представляет для учащихся большие трудности.

3. Для проверки усвоения учащимися теоремы о плоских углах трехгранного угла могут быть даны приводимые ниже вопросы, решаемые устно.

Вопросы. Можно ли образовать трехгранный угол, если его плоские углы при вершине содержат 30°, 50° и 80°? 100°, 100° и 120°? 200°, 80° и 100°?

В первом случае, хотя сумма углов $30° + 50° + 80° < 360°$, однако получить трехгранный угол нельзя, так как $80° \not< 30° + 50°$, где знак $\not<$ означает „не меньше"; во втором случае оба необходимых условия соблюдены: $100° + 100° + 120° < 360°$ и $120° < 100° + 100°$; в третьем случае $200° + 80° + 100° \not< 360°$, и потому нельзя построить трехгранный угол с указанными плоскими углами при вершине.

Следует указать учащимся, что условие: каждый плоский угол трехгранного угла должен быть меньше суммы двух других плоских углов, достаточно проверить для большего из трех данных плоских углов.

4. Не лишне также провести параллель между отдельными теоремами планиметрии и соответствующими теоремами стереометрии:

В каждом треугольнике бо́льшая сторона меньше суммы двух других сторон, но больше их разности.	В каждом трехгранном угле бо́льший плоский угол меньше суммы двух других плоских углов, но больше их разности.
В треугольнике против равных сторон лежат и равные углы.	В трехгранном угле против равных плоских углов лежат и равные двугранные углы.

Доказательство приведенных теорем дано в стабильном учебнике.

Как следствие из последней приведенной теоремы вытекает, что *если плоские углы трехгранного угла равны, то равны и двугранные углы его, и обратно; такой трехгранный угол — правильный.*

В планиметрии этому следствию соответствует следствие: ***если углы треугольника равны, то и стороны его равны, и обратно; такой треугольник — правильный.***

Приводим доказательство указанного выше предложения. Пусть даны трехгранные углы $SABC$ и $S_1A_1B_1C_1$ (рис. 118) и пусть

$$\angle ASB = \angle A_1S_1B_1,$$
$$\angle BSC = \angle B_1S_1C_1,$$
$$\angle CSA = \angle C_1S_1A_1.$$

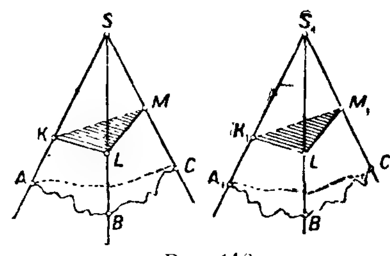


Рис. 118.

Доказать, что соответственные двугранные углы также равны.

Полезно отметить на рисунке цветными мелками равные плоские углы при вершине.

Доказательство. Берем на ребре SA данного трехгранного угла $SABC$ произвольную точку K и откладываем на ребре S_1A_1 другого данного трехгранного угла отрезок $S_1K_1 = SK$; на рисунке делается об этом отметка двумя черточками или цветным мелом. Проводим затем через точки K и K_1 плоскости, соответственно перпендикулярные к SA и к S_1A_1, и тогда $\angle MKL$ и $\angle M_1K_1L_1$ являются линейными углами двугранных углов при ребрах SA и S_1A_1. Из сопоставления отдельных треугольников, полученных на гранях углов, заключаем:

$$1)\ \triangle SKL = \triangle S_1K_1L_1 \text{ (УСУ)},$$

откуда

$$SL = S_1L_1 \quad \text{и} \quad KL = K_1L_1;$$

$$2)\ \triangle SKM = \triangle S_1K_1M_1 \text{ (УСУ)},$$

откуда

$$SM = S_1M_1 \quad \text{и} \quad KM = K_1M_1;$$

$$3)\ \triangle SML = \triangle S_1M_1L_1 \text{ (СУС)},$$

откуда

$$LM = L_1M_1.$$

Таким образом, находим, что

$$\triangle KLM = \triangle K_1L_1M_1 \text{ (ССС)}$$

и

$$\angle MKL = \angle M_1K_1L_1,$$

т. е. линейные углы двугранных углов при ребре SA равны, а отсюда следует, что равны и двугранные углы.

Так же доказывается равенство двух остальных двугранных углов.

Доказательство этой теоремы дает хороший материал для повторения учащимися признаков равенства треугольников.

Примечание. Плоский угол одной из граней трехгранного угла называется противолежащим двугранному углу, образованному двумя другими гранями.

Из рассмотренной теоремы вытекает, что равным плоским углам соответствуют равные противолежащие им двугранные углы.

***Теорема.* Если в трехгранном угле два двугранных угла прямые, то и противолежащие им плоские углы прямые.**

Строим трехгранный угол так, чтобы одна его грань, положим ASC, лежала в горизонтальной плоскости (рис. 119), при этом $\angle ASC \neq d$; проводим затем пл. $ASB \perp$ пл. ASC и пл. $BSC \perp$ пл. ASC; таким образом, двугранные углы при ребрах SA и SC — прямые, линия пересечения SB плоскостей ASB и BSC перпендикулярна к плоскости ASC и $\angle ASB = \angle BSC = d$. Теорема доказана.

Рис. 119.

Верна и теорема, обратная данной: **если в трехгранном угле два плоских угла прямые, то и противолежащие им двугранные углы прямые.**

В самом деле, по условию $\angle ASB = \angle BSC = d$ (рис. 119), а в таком случае плоскость ASB и плоскость BSC, проходящие через перпендикуляр BS к плоскости ASC (теорема о двух перпендикулярах), перпендикулярны к плоскости ASC, и двугранные углы при ребрах SA и SC — прямые, что и требовалось доказать.

Таковы, например, углы при вершинах куба, модели трехгранных углов в любой комнате, так как стены перпендикулярны к полу.

Обе последние теоремы могут быть даны учащимся для самостоятельного разбора; доказательство их несложно.

§ 28. Дополнительные трехгранные углы.

1. На кружковых занятиях с учащимися может быть рассмотрен вопрос о дополнительных трехгранных углах. Приводим их построение.

Пусть дан трехгранный угол $SABC$. Возьмем внутри его произвольную точку S_1 и проведем из нее перпендикуляры S_1A_1, S_1B_1 и S_1C_1 к граням данного трехгранного угла (рис. 120). Проводим затем через перпендикуляры S_1B_1 и S_1C_1 плоскость; она пересечет грани ASC и ASB соответственно по прямым KB_1 и KC_1; проводим также плоскость через перпендикуляры S_1C_1 и S_1A_1; эта плоскость пересечет грани ASB и BSC по прямым LC_1 и LA_1; наконец, проводим плоскость через перпендикуляры S_1A_1 и S_1B_1; плоскость эта пересечет грани BSC и CSA по прямым MA_1 и MB_1. Так построенные три плоскости образуют трехгранный угол $S_1A_1B_1C_1$, который является **дополнительным** по отношению к данному трехгранному углу $SABC$.

Точно так же $AS \perp$ пл. $B_1S_1C_1$ и $CS \perp$ пл. $A_1S_1B_1$.

Итак, внутри трехгранного угла $S_1A_1B_1C_1$ взята точка S и из нее

проведены к граням трехгранного угла перпендикуляры SA, SB и SC, и трехгранный угол $SABC$ — дополнительный по отношению к трехгранному углу $S_1A_1B_1C_1$, а потому

$$\angle KB_1M + \angle KSM = 2d,$$
$$\angle KC_1L + \angle KSL = 2d,$$
$$\angle LA_1M + \angle LSM = 2d.$$

2. Что касается суммы двугранных углов трехгранного угла, то можно доказать, что сумма их больше $2d$, но меньше $6d$.

Действительно, пусть двугранные углы данного трехгранного угла $SABC$ будут $\angle SA$, $\angle SB$, $\angle SC$, где $\angle SA$ обозначает двугранный угол $BSAC$, $\angle SB$ — двугранный угол $ASBC$, $\angle SC$ — двугранный угол $ASCB$, и углы $\angle BSC$, $\angle ASC$, $\angle ASB$ — линейные углы соответственных двугранных углов и, кроме того, углы A_1, B_1 и C_1 — плоские углы, соответствующие плоским углам трехгранного угла с вершиной в точке S_1.

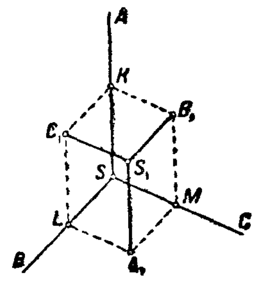


Рис. 120.

Можно записать:

$$\angle SA + \angle A_1 = 2d,$$
$$\angle SB + \angle B_1 = 2d,$$
$$\angle SC + \angle C_1 = 2d.$$

Суммируя почленно указанные равенства, получаем:

$$\angle SA + \angle SB + \angle SC + (\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1) = 6d;$$

так как

$$\angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 < 4d,$$

как сумма плоских углов при вершине трехгранного угла, то

$$\angle SA + \angle SB + \angle SC > 2d,$$

и, следовательно,

$$\angle SA + \angle SB + \angle SC < 6d.$$

Выполненное построение дает одновременно и линейные углы всех двугранных углов обоих трехгранных углов: $\angle LA_1M$ — линейный угол двугранного угла при ребре S_1A_1, так как пл. $BSC \perp S_1A_1$; $\angle KC_1L$ — при ребре S_1C_1, так как пл. $ASB \perp S_1C_1$; $\angle KB_1M$ — при ребре S_1B_1; $\angle C_1LA_1$ — при ребре SB; $\angle A_1MB_1$ — при ребре SC; $\angle B_1KC_1$ — при ребре SA.

В то же время

$$\angle A_1LC_1 + \angle A_1S_1C_1 = 2d,$$
$$\angle B_1KC_1 + \angle B_1S_1C_1 = 2d,$$
$$\angle A_1MB_1 + \angle A_1S_1B_1 = 2d.$$

Итак, **плоские углы трехгранного угла $S_1A_1B_1C_1$ дополняют линейные углы двугранных углов угла $SABC$ до $2d$**; этим и объясняется название дополнительного трехгранного угла.

Докажем следующую теорему: **если трехгранный угол $S_1A_1B_1C_1$ дополнительный по отношению к трехгранному углу $SABC$, то и трехгранный угол $SABC$ является дополнительным по отношению к трехгранному углу $S_1A_1B_1C_1$**, т. е плоские углы трехгранного угла

SABC дополняют линейные углы двугранных углов трехгранного угла $S_1A_1B_1C_1$ до $2d$.

В самом деле, по построению,

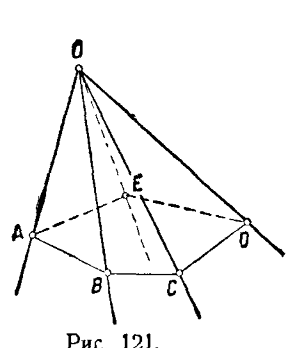
$$\left.\begin{array}{l} S_1A_1 \perp \text{пл. } BSC \\ S_1C_1 \perp \text{пл. } ASB \end{array}\right\},$$

следовательно,

$$\left.\begin{array}{l} \text{пл. } A_1S_1C_1 \perp \text{пл. } BSC \\ \text{пл. } A_1S_1C_1 \perp \text{пл. } ASB \end{array}\right\} BS \perp \text{пл. } A_1S_1C_1.$$

§ 29. Выпуклый многогранный угол.

1. Чтобы получить изображение многогранного угла, следует начертить произвольной формы выпуклый многоугольник *ABCDE* (рис. 121), взять где-либо вне его плоскости точку *O* и соединить ее со всеми вершинами многоугольника; каждые две прямые, проходящие через точку *O* и концы одной из сторон многоугольника, однозначно определяют плоскость — грань многогранного угла; число граней многогранного угла равно числу сторон многоугольника.



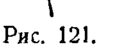


Рис. 121.

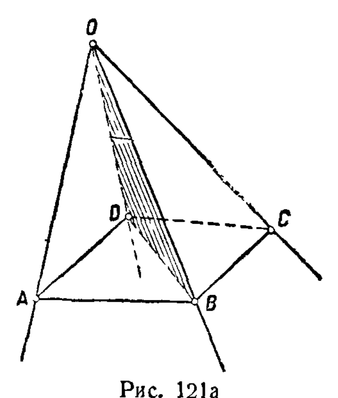


Рис. 121а

2. Свойство плоских углов выпуклого многогранного угла—сумма плоских его углов при вершине меньше $4d$ — должно быть показано при помощи модели так же, как это было сделано для трехгранного угла. Тригонометрическое доказательство указанного свойства приведено в стабильном учебнике; ниже дается другое доказательство, основанное на свойстве плоских углов при вершине трехгранного угла.

Доказательство. Пусть *O* — вершина многогранного угла, а *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, ... — вершины выпуклого многоугольника, *OA*, *OB*, *OC*, *OD*, *OE*, .. — ребра многогранного угла (рис. 121). Допустим, что многоугольник имеет n сторон и, следовательно, многогранный угол имеет n граней. Обозначим сумму плоских углов при вершине *O* многогранного угла через x. Сумма внутренних углов всех n треугольников: *OAB*, *OBC*, *OCD*, *ODE*, *OEA*, ... равна $2dn$; сумма же углов, прилежащих к основаниям *AB*, *BC*, *CD*, ... этих треугольников, равна $2dn—x$; эта сумма больше суммы углов многоугольника *ABCDE* ..., которая равна $2d(n-2)$, а потому

$$2dn - x > 2d(n-2),$$

или

$$2dn - x > 2dn - 4d,$$

откуда находим, что $x < 4d$, так как из двух разностей, уменьшаемые которых равны, та больше, у которой вычитаемое меньше. Итак, **сумма плоских углов при вершине многогранного угла меньше $4d$.**

В многогранном угле, как и в трехгранном угле, каждый плоский угол при вершине многогранного угла меньше суммы остальных плоских углов.

В самом деле, пусть дан четырехгранный угол $OABCD$ (рис. 121*а*). Проводим через его ребра OB и OD плоскость; она разделит четырехгранный угол на два трехгранных угла $\angle OABD$ и $\angle OBCD$, при этом

$$\angle DOC < \angle COB + \angle BOD$$

и

$$\angle BOD < \angle AOD + \angle BOA.$$

Сложив почленно обе части неравенств и вычтя затем из обеих частей полученного неравенства по углу BOD, имеем:

$$\angle DOC < \angle AOD + \angle BOA + \angle COB.$$

Точно так же:

$$\angle AOD < \angle BOA + \angle COB + \angle DOC,$$
$$\angle BOA < \angle COB + \angle DOC + \angle AOD,$$
$$\angle COB < \angle DOC + \angle AOD + \angle BOA.$$

Аналогичное доказательство может быть приведено и для пятигранного, шестигранного и т. д. углов.

3. Для проверки усвоения учащимися рассмотренных теорем могут быть заданы вопросы: может ли многогранный угол иметь при вершине следующие плоские углы: 50°, 100°, 150°, 200°? 30°, 60°, 90°, 120°? 60°, 60°, 50°, 170°?

Решение. В первом случае $50° + 100° + 150° + 200° \nless 360°$; следовательно, не может быть многогранного угла с такими плоскими углами; во втором случае $30° + 60° + 90° + 120° < 360°$ и $120° < 30° + 60° + 90°$; следовательно, существует многогранный угол с такими плоскими углами; в третьем случае $60° + 60° + 50° + 170° < 360°$, но $170° \nless 60° + 60° + 50°$, а потому нельзя построить многогранный угол с указанными плоскими углами.

Итак, чтобы построить многогранный угол, если даны его плоские углы α, β, γ, δ, ... φ, необходимо, чтобы $\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \varphi < 360°$; однако этого недостаточно; необходимо еще, чтобы при $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma \geqslant \delta \geqslant \ldots \geqslant \varphi$, $\alpha < \beta + \gamma + \delta + \ldots + \varphi$.

4. Для двугранных углов многогранного угла доказывается теорема, аналогичная теореме о двугранных углах трехгранного угла. Она гласит: **сумма двугранных углов n-гранного угла меньше $2dn$, но больше $2d(n-2)$.**

Эта теорема может быть проработана в порядке кружковой работы. Теорема интересна тем, что ее логическое доказательство может быть выполнено без помощи чертежа. Приводим доказательство.

Пусть из какой-нибудь точки S_1 внутри n-гранного угла S проведены к n его граням перпендикуляры; образовавшийся таким путем многогранный угол S_1 является для данного угла S дополнительным

Пусть сумма двугранных углов данного угла S равна E, а сумма всех плоских углов дополнительного угла равна $E_{доп}$. Каждый двугранный угол угла S вместе с соответственным плоским углом дополнительного угла S_1 в сумме дает $2d$, а потому $E + E_{доп} = 2dn$, а потому $E < 2dn$.

С другой стороны, $E_{доп} < 4d$, а потому

$$E > 2dn - 4d$$

или

$$E > 2d(n-2).$$

Проверка этой теоремы для $n = 3$, т. е. для трехгранного угла, дает

$$2d < E < 6d,$$

что совпадает с полученным раньше выводом.

§ 30. О конгруентных трехгранных углах.

1. При ознакомлении учащихся с трехгранными углами была проведена параллель между треугольником и трехгранным углом, и поэтому вполне понятно, что учащимися ставится вопрос, какие трехгранные углы считаются конгруентными и каковы признаки, устанавливающие их конгруентность.

Два трехгранных угла называются конгруентными, если они могут совместиться при вложении их один в другой, т. е. если соответственно совмещаются их двугранные углы и их плоские углы и, таким образом, совпадают их вершины и их ребра.

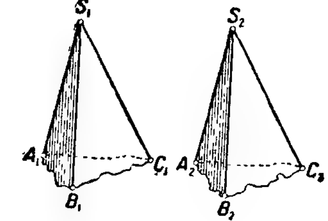


Рис. 122

2. Приводим признаки конгруентности трехгранных углов.

Теорема. **Два трехгранных угла конгруентны, если они имеют по равному плоскому углу, заключенному между двумя двугранными углами, соответственно равными и одинаково расположенными.**

Вычерчиваются два трехгранных угла $S_1A_1B_1C_1$ и $S_2A_2B_2C_2$ (рис. 122) и заштриховываются или отмечаются цветным мелом или карандашом равные плоские углы; пусть это будут $\angle A_1S_1B_1 = \angle A_2S_2B_2$; равны также двугранные углы при ребрах S_1A_1, S_2A_2 и S_1B_1, S_2B_2; для большей наглядности следует выделить и эти ребра цветными мелками или цветными карандашами.

При проведении доказательства конгруентности трехгранных углов путем вложения одного трехгранного угла в другой надлежит проявить строгую четкость, поясняя учащимся каждый отдельный этап доказательства и проводя при этом соответствующую запись.

Первый шаг. Совмещаем вершину S_1 одного трехгранного угла с вершиной S_2 другого трехгранного угла.

Второй шаг. Совмещаем ребро S_1A_1 с ребром S_2A_2 вращением фигуры (первого трехгранного угла $S_1A_1B_1C_1$) вокруг неподвижной точки S_1.

Третий шаг. Вращением вокруг неподвижной прямой S_2A_2 совмещаем плоскость грани $A_1S_1B_1$ с плоскостью грани $A_2S_2B_2$.

Эти три шага сопутствуют каждому доказательству, используемому при совмещении двух пространственных фигур, и при любых условиях могут быть выполнены; дальнейшее совмещение отдельных элементов фигур зависит от условий, предусмотренных теоремой.

Четвертый шаг. Вследствие равенства плоских углов, $\angle A_1S_1B_1 = \angle A_2S_2B_2$, ребро S_1B_1 совпадает с ребром S_2B_2; вследствие же равенства двугранных углов при ребрах S_1A_1 и S_2A_2 и при ребрах S_1B_1 и S_2B_2 плоскости $A_1S_1C_1$ и $B_1S_1C_1$ совместятся с плоскостями $A_2S_2C_2$ и $B_2S_2C_2$.

Пятый шаг. Последние две плоскости имеют общую точку S_2 (или S_1), а потому они имеют и общую прямую, проходящую через эту точку; принимая, однако, во внимание, что две пересекающиеся плоскости могут иметь только одну общую прямую, проходящую через их общую точку, — ребро S_1C_1 совпадает с ребром S_2C_2.

Вывод: вершины S_1 и S_2 трехгранных углов и все их ребра совпали, следовательно, трехгранные углы совместились, они конгруентны.

Следует указать учащимся, что если бы при условии равенства плоских углов $A_1S_1B_1$ и $A_2S_2B_2$ было дано, что двугранный угол при S_1A_1 равен двугранному углу при S_2B_2 и двугранный угол при S_1B_1 равен двугранному углу при S_2A_2, то трехгранные углы S_1 и S_2 нельзя было бы совместить; и потому понятно наличие в условии теоремы указания о том, что двугранные углы должны быть соответственно расположенными.

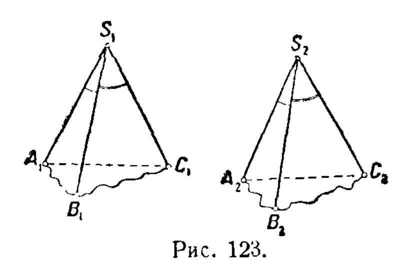


Рис. 123.

Не лишне при этом напомнить учащимся, что в планиметрии также нельзя доказать равенства треугольников по стороне и двум углам, если нет указания на расположение углов относительно данных сторон.

Теорема. (Второй признак конгруентности трехгранных углов.) **Два трехгранных угла конгруентны, если они имеют по равному двугранному углу, заключенному между двумя плоскими углами, соответственно равными и одинаково расположенными.**

Пусть равны двугранные углы при ребрах S_1B_1 и S_2B_2 (рис. 123). Ребра эти отметим цветным мелком. Пусть также $\angle A_1S_1B_1 = \angle A_2S_2B_2$ и $\angle B_1S_1C_1 = \angle B_2S_2C_2$. Равные плоские углы отметим на рисунке дугами, проведенными цветными мелками.

Доказательство.

Первый шаг. Совмещаем вершину S_1 с вершиной S_2.

Второй шаг. Совмещаем ребро S_1B_1 с ребром S_2B_2.

Третий шаг. Совмещаем плоскость $B_1S_1A_1$ с плоскостью $B_2S_2A_2$. На основании условий теоремы имеем:

Четвертый шаг. Ребро S_1A_1 совпадает с ребром S_2A_2 вследствие равенства плоских углов $B_1S_1A_1$ и $B_2S_2A_2$.

Пятый шаг. Плоскость грани $B_1S_1C_1$ совместится с плоскостью грани $B_2S_2C_2$ вследствие равенства двугранных углов при ребрах S_1B_1 и S_2B_2.

Шестой шаг. Ребро S_1C_1 совпадает с ребром S_2C_2 вследствие равенства плоских углов $B_1S_1C_1$ и $B_2S_2C_2$.

Вывод. Грань $A_1S_1C_1$ совместится с гранью $A_2S_2C_2$, ибо через две пересекающиеся прямые можно провести только одну плоскость, и трехгранные углы совпадают.

Следует указать учащимся, что, согласно данной теореме, для равенства трехгранных углов необходимо, чтобы заданные плоские углы трехгранных углов были одинаково расположены, и если это не имеет места, то трехгранные углы не равны.

Доказательство следующих двух признаков равенства трехгранных углов основано на рассмотренных первых двух признаках равенства трехгранных углов.

Теорема. (Третий признак конгруентности трехгранных углов.) **Два трехгранных угла конгруентны, если все три плоских угла одного из них равны плоским углам другого из них и одинаково с ними расположены.**

Вследствие равенства плоских углов равны и одинаково расположены двугранные углы этих трехгранных углов, и доказательство сводится или к первому или ко второму признаку конгруентности трехгранных углов.

Теорема. (Четвертый признак конгруентности трехгранных углов). **Два трехгранных угла конгруентны, если все три двугранных угла одного из них равны соответственно трем двугранным углам другого и одинаково с ними расположены.**

Доказательство этого признака можно записать в следующем схематическом порядке:

1) Даны трехгранные углы S_1 и S_2.

2) Строим их дополнительные трехгранные углы S_1' и S_2'.

3) Плоские углы этих углов дополняют до $2d$ двугранные углы трехгранных углов S_1 и S_2.

4) Двугранные углы этих углов по условию равны, а потому **плоские углы дополнительных трехгранных углов равны и одинаково расположены.**

5) Отсюда следует, что и двугранные углы дополнительных углов равны и одинаково расположены.

6) Плоские углы данных углов дополняют до $2d$ двугранные углы дополнительных углов

7) Двугранные углы эти равны, а потому плоские углы данных углов равны и одинаково расположены.

Вывод. Данные трехгранные углы S_1 и S_2 удовлетворяют любому из трех приведенных признаков конгруентности трехгранных углов. Трехгранные углы конгруентны.

§ 31. Задачи и вопросы.

Для закрепления пройденного даются задачи как на построение, так и на вычисление, при этом, как правило, задачи на вычисление должны быть сперва решены в общем виде; после получения ответа в общем виде следует подставить в полученную формулу числовые значения входящих в нее величин. Каждая числовая задача должна сопровождаться четким рисунком, выполненным с соблюдением взятого масштаба, принятого угла сокращения и коэфициента сокращения.

Отдельные приводимые ниже задачи не лишне предварительно иллюстрировать при помощи геометрического ящика для более отчетливого

представления возможного взаимного положения прямых и плоскостей в трехгранном угле. Понятно, что вопросы, относящиеся к трехгранному углу и не являющиеся программным материалом средней школы, могут быть разобраны лишь с наиболее успевающими учащимися на занятиях в математическом кружке. Для преподавателя затронутые вопросы имеют особое значение, поскольку он должен быть более основательно знаком с трактовкой вопросов, нежели это имеет место в учебнике.

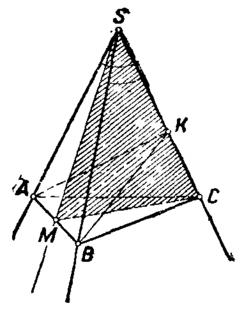


Рис. 124.

1) В трехгранном угле $SABC$ с двумя равными плоскими углами $\angle ASC = \angle BSC$ биссекторная плоскость двугранного угла при ребре SC перпендикулярна к плоскости третьего плоского угла ASB. Доказать.

Решение. Дан трехгранный угол $SABC$ с равными плоскими углами ASC и BSC (рис. 124). На рисунке следует выделить ребро SC, через которое проходит биссекторная плоскость, и отметить отличительными значками плоские углы ASC и BSC. Если отложить от вершины S на ребрах трехгранного угла равные отрезки, $SA = SB = SC$, и провести через точки A, B и C плоскость, то в сечении получится равнобедренный треугольник ACB. Чтобы затем провести биссекторную плоскость двугранного угла, ребро которого SC, следует построить его линейный угол AKB, проведя $BK \perp SC$ в грани SBC и $AK \perp SC$ в грани SAC. Основания этих перпендикуляров совпадут, так как AK и BK — высоты равных равнобедренных треугольников SBC и SAC. Треугольник AKB — равнобедренный, и, если соединить вершину K с серединой M стороны AB, то угол AKB разделится пополам, при этом $MK \perp SC$, так как плоскость треугольника $AKB \perp SC$; прямые MK и SC однозначно определяют плоскость, которая пересекает грань ASB по прямой SM и плоскость треугольника ABC по прямой MC; плоскость MSC — искомая биссекторная плоскость, так как углы AKM и BKM равны. Прямая $AB \perp MK$ и $AB \perp MC$, а потому $AB \perp$ пл. SMC, откуда следует, что биссекторная плоскость SMC двугранного угла $ASCB$ перпендикулярна к плоскости противолежащей грани ASB.

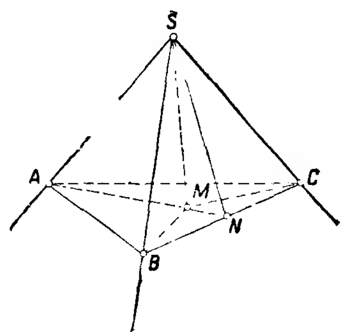


Рис. 125.

2) Если внутри трехгранного угла $SABC$ (или в плоскости одной его грани) провести прямую SM (рис. 125), **то сумма углов, образуемых прямой SM и ребрами SA, SB, SC, меньше суммы плоских углов трехгранного угла.** Доказать.

Решение. Согласно условию задачи требуется доказать, что

$$\angle ASM + \angle BSM + \angle CSM < \angle ASB + \angle BSC + \angle CSA.$$

Откладываем от вершины S на ребрах произвольной длины отрезки SA, SB и SC и проводим через точки A, B и C плоскость. Прямая SM пересечет эту плоскость в точке M. Соединив затем точку M с точками

A, B и C и продолжив AM до пересечения со стороною BC в точке N, проводим прямую SN.

Из трехгранного угла $SACN$ имеем:

$$\angle ASN < \angle ASC + \angle NSC$$

или

$$\angle ASM + \angle MSN < \angle ASC + \angle NSC. \qquad (1)$$

Из трехгранного угла $SBMN$ имеем:

$$\angle BSM < \angle MSN + \angle BSN. \qquad (2)$$

Складывая почленно неравенства (1) и (2), получим:

$$\angle ASM + \angle MSN + \angle BSM < \angle ASC + \angle NSC + \angle MSN + \angle BSN.$$

Отнимая от обеих частей неравенства по углу MSN и принимая во внимание, что $\angle NSC + \angle BSN = \angle BSC$, имеем:

$$\angle ASM + \angle BSM < \angle ASC + \angle BSC. \qquad (3)$$

Точно так же:

$$\angle BSM + \angle CSM < \angle BSA + \angle CSA. \qquad (4)$$

$$\angle CSM + \angle ASM < \angle CSB + \angle ASB. \qquad (5)$$

Складывая неравенства (3), (4) и (5), получаем:

$$2(\angle ASM + \angle BSM + \angle CSM) < 2(\angle ASC + \angle BSA + \angle CSB),$$

или

$$\angle ASM + \angle BSM + \angle CSM < \angle ASC + \angle BSA + \angle CSB.$$

Теорема справедлива и в том случае, если прямая SM лежит в плоскости одной из граней трехгранного угла; при наличии последнего условия доказательство упрощается.

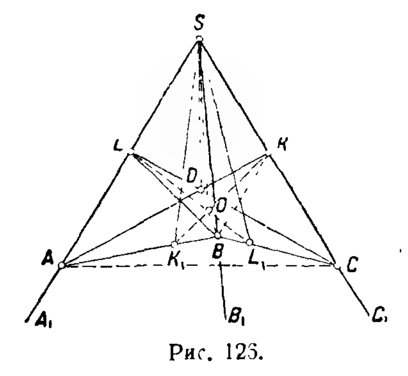


Рис. 126.

3) **Биссекторные плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой, и каждая точка этой прямой удалена от граней трехгранного угла на одно и то же расстояние.** Доказать.

Решение. Следует заметить, что любая точка биссекторной плоскости двугранного угла отстоит от граней двугранного угла на одинаковое расстояние; данная теорема аналогична теореме планиметрии: любая точка биссектрисы угла отстоит от сторон угла на одинаковое расстояние.

Дан трехгранный угол $SA_1B_1C_1$ (рис. 126), и пусть его грань A_1SC_1 лежит в плоскости чертежа.

Проводим из произвольной точки A ребра SA_1 прямую $AK \perp SC_1$; AK лежит в плоскости грани A_1SC_1; проведя затем прямую $KB \perp SC_1$ до пересечения в точке B с ребром SB, получим $\angle AKB$ — линейный угол двугранного угла, образуемого гранями ASC и BSC. Если после этого провести биссектрису KK_1 угла AKB и через прямые KK_1 и SK

плоскость K_1SK, то получим биссекторную плоскость, так как $\angle AKK_1 = \angle K_1KB$ — линейные углы двугранных углов, на которые плоскость SKK_1 разделила двугранный угол $ASKB$. Проведя $BL \perp SA$ в плоскости грани A_1SB_1 и $LC \perp SA$ в плоскости грани A_1SC_1, мы находим биссекторную плоскость LSL_1 двугранного угла $B_1A_1SC_1$. Плоскости линейных углов AKB и BLC пересекаются по прямой BD, на этой же прямой BD лежит точка пересечения O биссектрис KK_1 и LL_1 линейных углов AKB и BLC, следовательно, точка O одинаково удалена от всех трех граней трехгранного угла. Плоскость, проведенная через прямые BD и SB_1, — третья биссекторная плоскость, проходящая через прямую OS пересечения первых двух биссекторных плоскостей, и любая точка прямой OS, принадлежащая всем трем биссекторным плоскостям, одинаково удалена от всех трех граней. Данная теорема аналогична теореме планиметрии: биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая удалена от сторон угла на одинаковое расстояние.

4) **Плоскости, проходящие через биссектрисы плоских углов каждой грани трехгранного угла и противолежащие им ребра, пересекаются по одной прямой.**

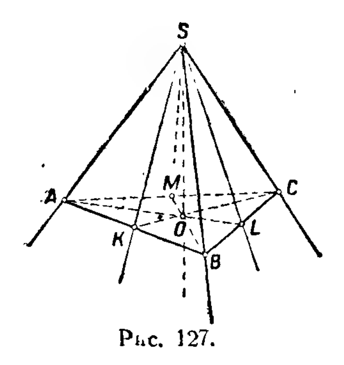


Рис. 127.

Решение. Отложим от вершины S трехгранного угла на его ребрах равные отрезки, так что $SA = SB = SC$, и проведем через точки A, B и C плоскость (рис. 127). Пусть SK, SL и SM — биссектрисы граней ASB, BSC и CSA трехгранного угла $SABC$; проведем через SK и SC, SL и SA, SM и SB плоскости; эти плоскости пересекут плоскость ABC по прямым AL, BM и CK; эти прямые — медианы треугольника ABC. Треугольники ASB, BSC и CSA — равнобедренные, а потому SK, SL и SM, будучи биссектрисами, являются одновременно и медианами треугольников, медианы эти пересекаются в одной точке S, и точки K, L и M таким образом — середины сторон треугольника ABC. Итак, плоскости сечения имеют две общие точки, точки O и S, следовательно, плоскости имеют и общую прямую OS, по которой они пересекаются.

Данная теорема аналогична теореме планиметрии: медианы треугольников пересекаются в одной точке.

5) **Плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла перпендикулярно к противолежащей грани, пересекаются по одной прямой.**

Решение. Дан трехгранный угол $SA_1B_1C_1$ (рис. 128); допустим, что через ребро SC_1 проведена перпендикулярно к грани A_1SB_1 плоскость SK_1C_1, пересекающая грань A_1SB_1 по прямой SK_1. В произвольной точке K этой прямой проводим прямую $AB \perp SK$, прямая AB пересечет ребра трехгранного угла SA_1 и SB_1 в точках A и B; проводим затем через ребро SA_1 плоскость A_1SL_1, перпендикулярную к грани B_1SC_1 и пересекающую эту грань по прямой SL_1; наконец, проводим прямую $BL \perp SL_1$ до пересечения с ребром SC_1 в точке C. Соединив точку C с точкой A, получаем сечение трехгранного угла плоскостью ABC.

Если провести в плоскости ABC прямые CK и AL, то нетрудно усмотреть, что прямые CK и AL являются высотами треугольника сечения ABC. В самом деле, проведем $CN \perp SK$, тогда $AB \perp SK$ по построению и $CN \perp AB$ (CN ортогональна к AB) по определению перпендикуляра к плоскости, следовательно, прямая AB, перпендикулярная к двум пересекающимся прямым CN и SK иа плоскости KCS, перпендикулярна и к самой плоскости, а потому и к прямой CK. Итак, $CK \perp AB$, значит CK — высота треугольника ABC. Так же доказывается, что AL и BM — высоты треугольника ABC; но высоты треугольника пересекаются в одной точке O (ортоцентре). Эта точка O является общей точкой трех плоскостей CSK, ASL и BSM; у этих плоскостей имеется еще вторая общая точка S — вершина трехгранного угла, следовательно, у них имеется и общая прямая SO, по которой они все три пересекаются.

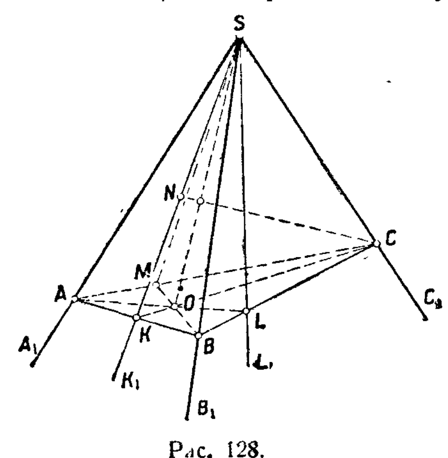


Рис. 128.

Если трехгранный угол правильный, то прямая SO перпендикулярна к плоскости треугольника ABC и прямые SK, SL и SM — биссектрисы плоских углов трехгранного угла.

Эта теорема аналогична теореме планиметрии: три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

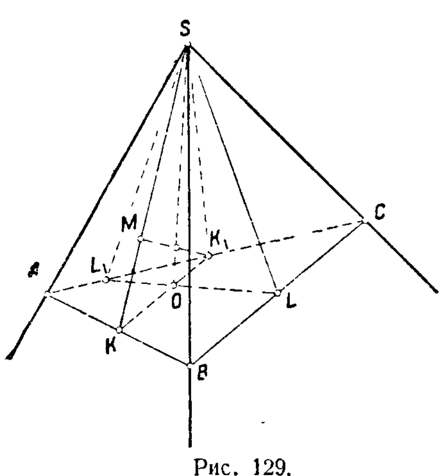


Рис. 129.

6) **Плоскости, проведенные через биссектрисы плоских углов граней трехгранного угла перпендикулярно к его граням, пересекаются по прямой, каждая точка которой одинаково удалена от ребер трехгранного угла.**

Решение. $SABC$ — трехгранный угол. Отложим на его ребрах отрезки $SA = SB = SC$ и проведем через точки A, B и C плоскость ABC (рис. 129). После этого проведем биссектрису SK плоского угла ASB и через нее перпендикулярно к плоскости ASB плоскость SKK_1; последняя пересечет плоскость ABC по некоторой прямой KK_1. Следует доказать, что $AB \perp KS$. Действительно, треугольник ASB — равнобедренный и SK — его биссектриса, следовательно, и высота, а потому $AB \perp KS$.

Проводим затем из точки K_1 к прямой SK перпендикуляр K_1M; эта прямая K_1M перпендикулярна и к плоскости ASB, так как лежит в плоскости SKK, перпендикулярной к плоскости ASB; отсюда заключаем,

что $K_1M \perp AB$, а потому прямая AB, перпендикулярная к двум прямым K_1M и SK на плоскости KSK_1, перпендикулярна к плоскости KSK_1; следовательно, $AB \perp KK_1$, а это значит, что KK_1 — медиатриса треугольника ABC. Так же находим, что плоскость LSL_1, перпендикулярная к плоскости грани BSC и проходящая через биссектрису SL угла BSC, пересекает плоскость ABC по медиатрисе LL_1; то же имеет место для третьей плоскости, проходящей через биссектрису угла ASC перпендикулярно к плоскости грани ASC. Итак, все три плоскости, проведенные через биссектрисы плоских углов граней трехгранного угла перпендикулярно к его граням, пересекают плоскость треугольника ABC по трем медиатрисам: медиатрисы же треугольника ABC пересекаются в одной точке O; эта точка O является общей точкой всех трех плоскостей; кроме того, и вершина S трехгранного угла является общей их точкой, а потому плоскости пересекаются по прямой SO, любая точка которой отстоит от ребер трехгранного угла на одинаковое расстояние.

7) **Плоскость пересекает ребра прямоугольного трехгранного угла. Высота, проведенная из вершины трехгранного угла на эту плоскость, проходит через ортоцентр сечения.** Доказать.

8) **Пересечь прямоугольный трехгранный угол плоскостью так, чтобы в сечении получился треугольник, равный данному.**

Решение. Допустим, что треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC, построен (рис. 130), и пусть плоскость его отсекает на ребрах трехгранного угла, считая от его вершины S, отрезки x, y и z. Из рассмотрения соответствующих треугольников имеем: $x^2+y^2=c^2$; $y^2+z^2=a^2$; $z^2+x^2=b^2$, откуда $2x^2+2y^2+2z^2=a^2+b^2+c^2$ и $2x^2=b^2+c^2-a^2$, $2y^2=c^2+a^2-b^2$, $2z^2=a^2+b^2-c^2$.

Таким образом,

$$x\sqrt{2}=\sqrt{b^2+c^2-a^2},$$
$$y\sqrt{2}=\sqrt{c^2+a^2-b^2},$$
$$z\sqrt{2}=\sqrt{a^2+b^2-c^2}.$$

Для получения отрезка $x\sqrt{2}$ строим прямоугольный треугольник, катеты которого равны b и c, а затем — прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной $\sqrt{b^2+c^2}$, и катетом, равным a; тогда другой катет последнего треугольника равен $x\sqrt{2}$ (рис. 130а). Построив, наконец, квадрат, диагональ которого равна $x\sqrt{2}$, получим сторону квадрата x; так же строим отрезки y и z. Отложив затем на ребре SA_1 отрезок, равный x, на ребре SC_1 отрезок, равный z, и на ребре SB_1 отрезок, равный $\frac{1}{2}y$, так как этот отрезок на рисунке должен быть сокращен вдвое при коэфициенте $k=0,5$, проводим через точки A_1, B_1 и C_1 плоскость; полученный таким построением треугольник сечения $A_1B_1C_1=\triangle ABC$ (CCC). На рис. 130 грань A_1SC_1 трехгранного угла расположена в вертикальной плоскости и притом так, что ребро SA_1 параллельно плоскости чертежа, а ребро SB_1 к ней перпендикулярно. Этим и объясняется, что отрезки x и z даны в действительную величину, а y — в сокращении ($k=0,5$). Следует указать, что стороны треугольника могут быть расположены и в ином порядке; от этого, однако, ход решения не изменится.

Можно предложить учащимся доказать, что

$$(\text{пл. } A_1B_1C_1)^2 = (\text{пл. } A_1SB_1)^2 + (\text{пл. } B_1SC_1)^2,$$

используя для этого формулу Герона и полученные выше значения для x, y и z.

9) Трехгранный угол $SABC$, плоские углы которого при вершине S равны α, β и γ, пересечен плоскостью ABC так, что $SA = SB = SC = m$. Найти углы, образуемые плоскостью сечения с плоскостями граней трехгранного угла.

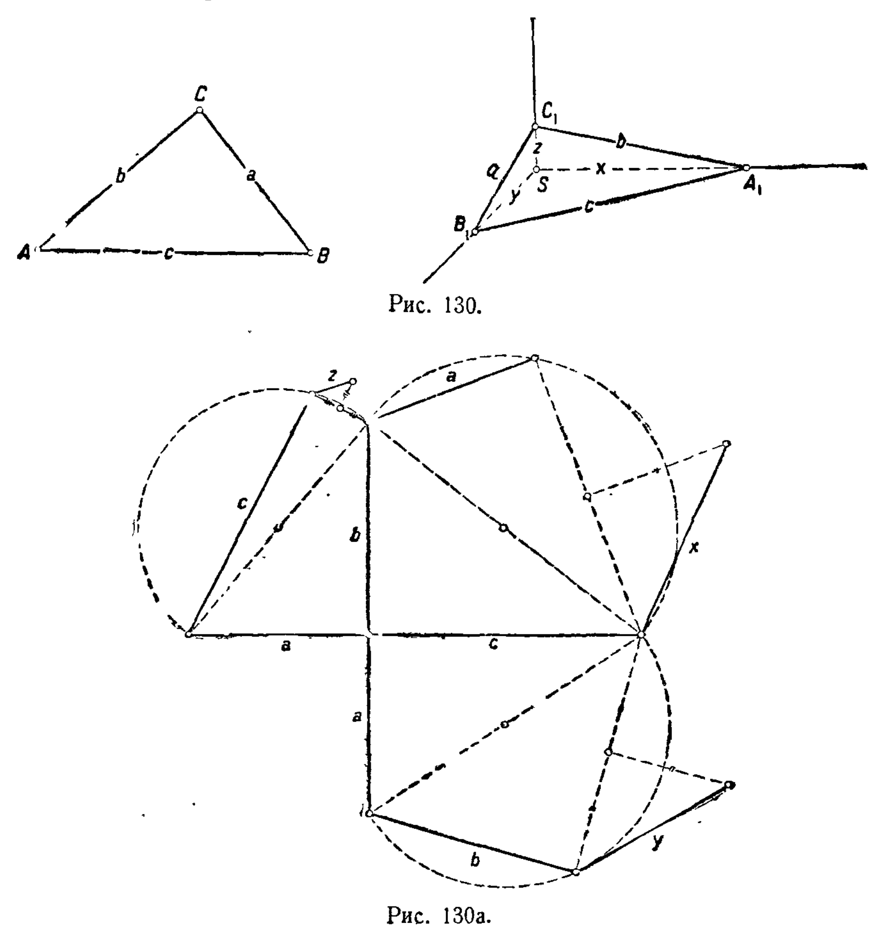


Рис. 130.

Рис. 130а.

Решение. Соединив вершину S с центром M окружности, описанной около треугольника сечения ABC, имеем $SM \perp ABC$ (рис. 131). Проводим $MK \perp AB$, при этом K — середина AB, так как треугольник ASB — равнобедренный, и соединим точку K с вершиной S, тогда $\angle SKM = \varphi_1$ — искомый угол наклона грани ASB к плоскости ABC.

Но

$$\sin \varphi_1 = \frac{SM}{SK}, \quad SM = m \sin x \quad \text{и} \quad SK = m \cos \frac{\gamma}{2};$$

следовательно,

$$\sin\varphi_1 = \frac{m \sin x}{m \cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin x}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

где x — угол наклона ребра к плоскости ABC.

Так же находим углы φ_2 и φ_3, углы наклона других граней BSC и CSA трехгранного угла к плоскости сечения:

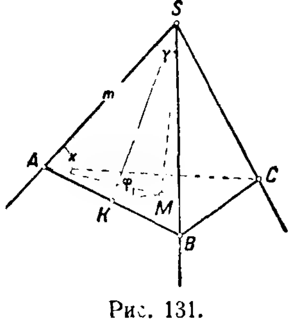


Рис. 131.

$$\sin\varphi_2 = \frac{\sin x}{\cos\frac{\alpha}{2}}, \quad \sin\varphi_3 = \frac{\sin x}{\cos\frac{\beta}{2}},$$

при этом угол x находится приемом тригонометрии; $x = \arcsin\frac{R}{m}$, где $R = \frac{abc}{4S_\triangle}$.

Если $\alpha = \beta = \gamma$, то $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$.

Если $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, то

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}\cdot 2}{3\cdot\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \text{ и } \varphi = \arcsin\frac{2}{3}.$$

Если, наконец, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$, то

$$\sin\varphi = \frac{\sin x}{\cos 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}\cdot 2}{3\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

§ 32. Метрическая зависимость между плоскими и двугранными углами трехгранного угла.

Предыдущие задачи и вопросы, разбираемые в этом разделе, решаются с помощью тригонометрии и потому должны рассматриваться, когда учащиеся умеют решать треугольники и владеют техникой тригонометрических преобразований. Вопросы, как правило, прорабатываются в кружках и требуют для своего разрешения достаточного числа часов. Разбор приводимых вопросов имеет целью показать методы решения отдельных задач и дать преподавателям разъяснения на некоторые вопросы, возникающие, как показывает опыт, при проработке с учащимися раздела о трехгранных углах, особенно — когда сопоставляются отдельные свойства трехгранных углов со свойствами треугольников.

Заметим, что рассматриваемые ниже вопросы могут быть в равной мере отнесены к отделу тригонометрии.

Задача 1. Каждый плоский угол трехгранного угла равен α; при этом $3\alpha < 4d$. Найти двугранный угол трехгранного угла.

Дан трехгранный угол $SABC$: по условию $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSA = \alpha$ (рис. 132а). Чтобы найти величину одного из двугранных углов трехгранного угла $SABC$, строим линейный угол этого двугранного угла, положим, угла $BSAC$, для чего проводим из произвольной точки D, лежащей на ребре SC, прямую $DO \perp ASB$, а затем $OE \perp AS$, тогда и $DE \perp AS$ и $\angle DEO$ — искомый линейный угол. Пусть $\angle DEO = x$, тогда и аналогично построенный прямыми DF и OF угол DFO — линейный угол двугранного угла $CSBA$ — тоже равен x, так как против равных плоских углов лежат равные двугранные углы (см. стабильный учебник, ч. 2, раздел V, § 1), следовательно, $\triangle DOF = \triangle DOE$, ибо они имеют общий катет DO и по соответственно рав-

ному острому углу, $\angle DEO = \angle DFO$; из равенства данных треугольников следует, что $OE = OF$ и OS — биссектриса угла ASB. Обозначим отрезок SD через c; тогда находим из треугольника DSE, что $DE = c \sin\alpha$ и $SE = c\cos\alpha$, из треугольника OSE, что $OE = SE\cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = c\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, наконец, из треугольника DOE, что

$$\cos x = \frac{OE}{DE} = \frac{c\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{c\cdot\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

откуда

$$x = \arccos\left(\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right).$$

В частном случае, когда $\alpha = 90^\circ$, находим: $\cos x = \operatorname{ctg}90^\circ\cdot\operatorname{tg}45^\circ = 0$. Итак, $\cos x = 0$ и, следовательно, $x = 90^\circ$ (периодичность функции при этом не принята во внимание).

Если $\alpha = 60^\circ$, то $\cos x = \operatorname{ctg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}30^\circ = \operatorname{tg}^2 30^\circ = \frac{1}{3}$ и $x = \arccos\frac{1}{3}$.

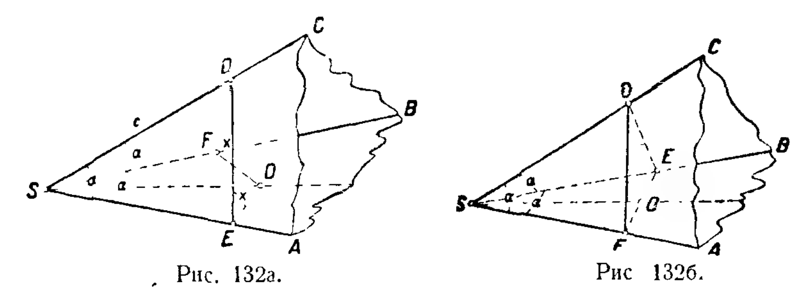


Рис. 132а. Рис 132б.

Другое решение этой же задачи.

Проводим в трехгранном угле $SABC$ (рис. 132б) прямую $DE \perp SC$ и прямую $DF \perp SC$; тогда $\angle FDE = x$ — искомый линейный угол двугранного угла; кроме того, соединим середину O отрезка FE с вершиной S.

Обозначим отрезок SD через c. Находим: $DF = c\cdot\operatorname{tg}\alpha$, $SF = \frac{c}{\cos\alpha}$ и $OF = SF\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$, ибо SO — биссектриса, так как $SE = SF$; последнее вытекает из равенства треугольников SDE и SDF, у которых общий катет SD и по равному углу α, $\angle DSE = \angle DSF = \alpha$.

Итак,

$$OF = \frac{c\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Из треугольника DOF находим:

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{OF}{DF} = \frac{c\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha\cdot c\cdot tg\,\alpha} = \frac{c\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{c\cdot\sin\alpha} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\sec\frac{\alpha}{2}.$$

Умение решить данную задачу используется впоследствии при решении задач „на пирамиды“, когда по данному плоскому углу при вершине

правильной треугольной пирамиды требуется найти двугранный угол, образуемый боковыми ее гранями.

Задача 2. Каждый из двугранных углов трехгранного угла равен α; найти плоские углы трехгранного угла ($2d < 3\alpha < 6d$ или $\frac{2}{3}d < \alpha < 2d$).

Задача решается на основании решения предыдущей задачи. Обозначив искомый плоский угол через x, записываем, используя полученный в предыдущей задаче вывод, что $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sec\frac{x}{2}$, а потому имеем: $\sec\frac{x}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$, откуда

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arc\,sec}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right) \text{ и } x = 2\operatorname{arc\,sec}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Возможно и следующее решение.

Проводим в трехгранном угле $SABC$ (рис. 133) через произвольную точку A, взятую на ребре AS, плоскость ABC, перпендикулярную к ребру SA. Эта плоскость, пересекая грани трехгранного угла, дает равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle BAC = \alpha$, так как он является одним из двугранных углов данного трехгранного угла, и стороны AB и AC равны, что вытекает из равенства прямоугольных треугольников SAB и SAC, имеющих общий катет SA и по равному острому углу α. Затем соединяем середину O отрезка BC — линии пересечения плоскости ABC с гранью SBC — с вершиной S и точкой A и рассмотрим для определения искомого плоского угла трехгранного угла треугольники SBO и SAB. Обозначив сторону $SB = SC$ через m, находим:

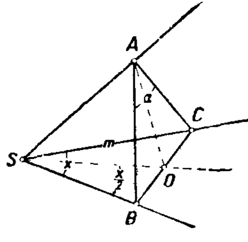


Рис. 133.

$$BO = m\cdot\sin\frac{x}{2}; \quad AB = m\cdot\sin x$$

и

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{BO}{AB} = \frac{m\cdot\sin\frac{x}{2}}{m\cdot\sin x} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}},$$

или

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sec\frac{x}{2} \text{ или } \sec\frac{x}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Итак, и это решение дает тот же результат.

Задача 3. Плоские углы трехгранного угла равны α, β и γ, где $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$, $\alpha + \beta + \gamma < 4d$ и $\alpha < \beta + \gamma$. Найти его двугранные углы.

Дан трехгранный угол $SABC$ (рис. 134), в котором $\angle BSC = \alpha$, $\angle CSA = \beta$ и $\angle ASB = \gamma$. Вычислим двугранный угол $BSAC$, лежащий против плоского угла α. Путь $SA = m$ и $AC \perp SA$, $AB \perp SA$; обозначим $\angle BAC$, линейный угол искомого двугранного угла, через x. Находим:

$$AB = m\cdot\operatorname{tg}\gamma, \quad SB = \frac{m}{\cos\gamma}, \quad AC = m\operatorname{tg}\beta \text{ и } SC = \frac{m}{\cos\beta};$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos x;$$
$$BC^2 = SB^2 + CS^2 - 2SB \cdot SC \cdot \cos \alpha.$$

Следовательно,

$$AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos x = SB^2 + SC^2 - 2SB \cdot SC \cdot \cos \alpha$$

или

$$m^2 \operatorname{tg}^2 \gamma + m^2 \operatorname{tg}^2 \beta - 2m^2 \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \beta \cos x = \frac{m^2}{\cos^2 \gamma} + \frac{m^2}{\cos^2 \beta} - \frac{2m^2 \cos \alpha}{\cos \gamma \cos \beta}.$$

Разделив все члены на m^2 и умножив их на $\cos^2 \gamma \cos^2 \beta$, получим

$$\sin^2 \gamma \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \gamma - 2 \sin \gamma \sin \beta \cos \gamma \cos \beta \cos x = \cos^2 \beta + \\ + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma;$$

$$-2 \sin \gamma \sin \beta \cos \gamma \cos \beta \cos x = \cos^2 \beta (1 - \sin^2 \gamma) + \\ + \cos^2 \gamma (1 - \sin^2 \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma;$$

$$-2 \sin \gamma \sin \beta \cos \gamma \cos \beta \cos x = \cos^2 \beta \cos^2 \gamma + \\ + \cos^2 \gamma \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Сокращая на $\cos \beta \cdot \cos \gamma$, имеем:

$$-2 \sin \beta \sin \gamma \cos x = 2 \cos \beta \cos \gamma - 2 \cos \alpha$$

и

$$\cos x = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

Рис. 134.

Это равенство может быть преобразовано, а именно:

$$1 - \cos x = 1 - \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma};$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\sin \beta \sin \gamma - \cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \cdot \sin \gamma} = \frac{\cos (\beta - \gamma) - \cos \alpha}{\sin \beta \sin \gamma};$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \sin \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2}}{\sin \beta \sin \gamma}$$

и

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \sin \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2}}{\sin \beta \sin \gamma}}.$$

В частном случае, если $\alpha = \beta = \gamma$, то

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \cdot \alpha}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha} = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \sec \frac{\alpha}{2}.$$

Результат тот же, что и полученный выше.

Если обозначить через y линейный угол двугранного угла, лежащего против плоского угла β, и через z — линейный угол двугранного угла, лежащего против плоского угла γ, то находим по аналогии:

$$\sin\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma+\alpha}{2}}{\sin\gamma\sin\alpha}};$$

$$\sin\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\alpha+\beta}{2}}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}.$$

Ограничиваемся приведенными примерами, показывающими, как находятся вычислением двугранные углы по данным плоским углам трехгранного угла. Если требуется решить задачу только методами геометрии, не прибегая к тригонометрии, то заданные углы могут быть в 30°, 45°, 60°, 90° и т. д. или углы, им пополнительные.

ГЛАВА VIII.

МНОГОГРАННИКИ. МЕТОДИКА ВОПРОСА.

§ 33. Введение.

1. Переходя к многогранникам (полиэдрам), которым соответствуют многоугольники (полигоны) в планиметрии, необходимо показать учащимся модели многогранников и только после этого дать определение многогранника.

Определение. *Многогранником называется тело, ограниченное со всех сторон плоскостями.* В связи с определением должно быть указано учащимся, что плоскости, ограничивающие многогранник, многоугольники — грани многогранника; стороны многоугольников — ребра многогранника; вершины многоугольников — вершины многогранника.

Следует провести аналогию между многоугольником на плоскости и многогранником в пространстве; сторонам многоугольника соответствуют и ребра и грани многогранника. В силу указанного имеем, например, следующее определение диагоналей многогранника:

Диагональю многоугольника называется отрезок, концами которого служат две вершины многоугольника, не лежащие на одной его стороне.	Диагональю многогранника называется отрезок, концами которого служат две вершины многогранника, не лежащие на одной его грани.

Необходимо при разборе каждого многогранника различать диагонали многогранника и диагонали его граней.

Из многоугольников наименьшее число сторон у треугольника, из многогранников наименьшее число граней у тетраэдра, число его граней — четыре.

2. Учащиеся уже практически знакомы с целым рядом многогранников — с кубом, параллелепипедом, призмой, пирамидой, а потому, возвращаясь снова к многогранникам, следует подробно остановиться на их образовании. Указывается, что призматическая поверхность образуется перемещением в пространстве прямой, которая, оставаясь параллельной самой себе, скользит по некоторой плоской ломаной, и одновременно дается понятие об образующей и направляю-

щей, затем поясняется, что многогранник, называемый *призмой*, получается пересечением **замкнутой** призматической поверхности двумя параллельными плоскостями.

Для призмы дается следующее определение: *призма есть тело, ограниченное замкнутой призматической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, пересекающими эту поверхность.*

Встречающееся в ряде учебников определение: призма есть многогранник, две грани которого — параллельные и равные одноименные многоугольники, называемые основаниями, другие же грани, называемые боковыми, — параллелограмы, неточно; от такого определения следует отказаться, так как имеются тела, удовлетворяющие этому определению, но не являющиеся призмами, как это видно из рисунка 135.

Надо указать учащимся, что название призмы обычно связывают не с числом ее граней, а с числом углов фигуры, лежащей в ее основании. Так, треугольная призма — призма, в основании которой лежит треугольник; но так как у такой призмы пять граней, то она — пятигранник, две грани которого, треугольники, — основания призмы, а другие три грани, параллелограмы, — ее боковые грани.

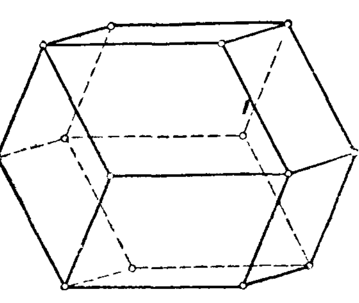


Рис. 135.

После того как учащиеся ознакомились на моделях с различными видами призм: наклонной, прямой и правильной, и с частным случаем правильной четырехугольной призмы, все ребра которой равны, т. е. с кубом, следует научить их вычерчивать перечисленные тела и строить различные их сечения. Сечения следует начинать с простейших, именно с диагональных сечений.

Из разновидностей призмы следует выделить параллелепипеды; в планиметрии им соответствуют параллелограмы. Целесообразно провести аналогию между отдельными теоремами планиметрии и стереометрии, в которых отмечаются соответственно свойства параллелограма и параллелепипеда. Так:

1) Диагонали $\frac{\text{параллелограма}}{\text{параллелепипеда}}$ пересекаются в одной точке и делятся в ней взаимно пополам.

2) Сумма квадратов всех диагоналей $\frac{\text{параллелограма}}{\text{параллелепипеда}}$ равна сумме квадратов всех его $\frac{\text{сторон}}{\text{ребер}}$.

3) Диагонали $\frac{\text{прямоугольного параллелограма}}{\text{прямоугольного параллелепипеда}}$ равны.

4) Квадрат диагонали $\frac{\text{прямоугольного параллелограма}}{\text{прямоугольного параллелепипеда}}$ равен сумме квадратов $\frac{\text{двух}}{\text{трех}}$ его измерений.

5) Диагональ $\frac{\text{квадрата}}{\text{куба}}$ равна $\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}$, где a — $\frac{\text{сторона квадрата}}{\text{ребро куба}}$.

Приводим доказательство второй из перечисленных теорем.

Пусть $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ — параллелепипед (рис. 136) и $A_1C_1C_2A_2$ и

$B_1B_2D_2D_1$ — его диагональные сечения. Диагональные сечения — параллелограмы. На основании зависимости между сторонами и диагоналями параллелограма имеем:

$$B_2D_1^2 + B_1D_2^2 = D_1D_2^2 + B_1B_2^2 + B_2D_2^2 + B_1D_1^2,$$
$$A_1C_2^2 + A_2C_1^2 = A_1A_2^2 + C_1C_2^2 + A_1C_1^2 + A_2C_2^2,$$
$$B_2D_2^2 + A_2C_2^2 = A_2B_2^2 + B_2C_2^2 + C_2D_2^2 + A_2D_2^2,$$
$$A_1C_1^2 + B_1D_1^2 = A_1B_1 + B_1C_1^2 + C_1D_1^2 + D_1A_1.$$

Складывая почленно полученные четыре равенства и сделав приведение подобных членов, имеем:

$$A_1C_2^2 + B_1D_2^2 + C_1A_2^2 + D_1B_2^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2,$$

где a, b и c — длины ребер, выходящих из одной вершины параллелепипеда.

Применяя полученную формулу к прямоугольному параллелепипеду, все диагонали которого равны, и обозначив его диагональ через D_n, имеем:

$$4D_n^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 \text{ или } D_n^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Для куба, ребро которого — a, получим:

$$D_k^2 = 3a^2 \text{ или } D_k = a\sqrt{3}.$$

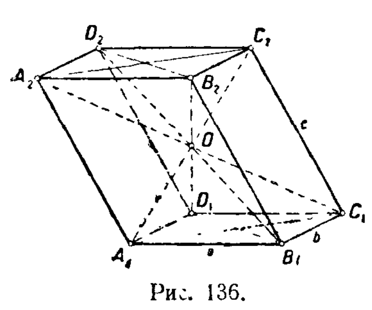


Рис. 136.

Должно быть уделено внимание показу учащимся, как вычерчиваются развертки призм, как прямых и правильных, так и наклонных, и предложено им вычертить некоторые из них. Такая работа несомненно содействует развитию пространственных представлений учащихся.

Развертки прямой треугольной призмы, прямоугольного параллелепипеда и четырехугольной наклонной призмы даны в стабильном учебнике.

3. Ниже приводится задача, решение и анализ которой связаны с построением развертки прямоугольного параллелепипеда.

Задача-шутка. В комнате, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$, измерения которого a, b и c, на потолке в углу B_2 сидит паук, а на полу в углу D_1 сидит муха (рис. 137). Определить кратчайший путь, по которому паук может добраться до мухи.

Решение данной задачи сводится к решению следующей задачи: найти кратчайшее расстояние от одного конца диагонали до другого ее конца, отсчитываемое по поверхности параллелепипеда.

Для решения задачи вычертим развертки прямоугольного параллелепипеда (рис. 137а).

Развернем поверхность параллелепипеда в плоскости передней грани в следующем порядке: вычерчиваем переднюю, затем нижнюю, заднюю и верхнюю грани, боковые же грани разместим по левую и правую стороны от прямоугольника $A_2A_1B_1B_2$, повернув их на 90° вокруг A_1A_2 и B_1B_2 так, чтобы они составляли продолжение передней грани. При таком

расположении граней кратчайшим расстоянием между точками B_2 и D_1 является гипотенуза прямоугольного треугольника $A_2B_2D_1$; это расстояние не зависит от расположения оснований и равно:

$$B_2D_1 = \sqrt{a^2 + (b+c)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc}. \qquad \text{(I)}$$

Однако кратчайшим расстоянием между точками B_2 и D_1, как видно из рисунка 137а, может быть и гипотенуза B_2D_1 треугольника $B_2C_2D_1$; это расстояние равно:

$$B_2D_1 = \sqrt{b^2 + (c+a)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ac}. \qquad \text{(II)}$$

Если построить развертку, в которой $B_2C_2C_1B_1$ находится вне четырехугольника $A_2B_2B_1A_1$, то из треугольника $D_1B_2B_1$ имеем:

$$B_2D_1 = \sqrt{c^2 + (a+b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab}. \qquad \text{(III)}$$

Еще одно из возможных наименьших расстояний:

$$B_2C_2D_2D_1 = a + b + c. \quad \ldots \text{(IV)}$$

Других комбинаций нет. Сравним их между собою.

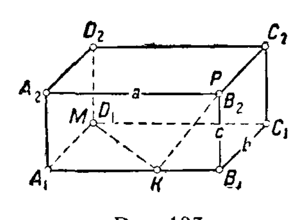


Рис. 137.

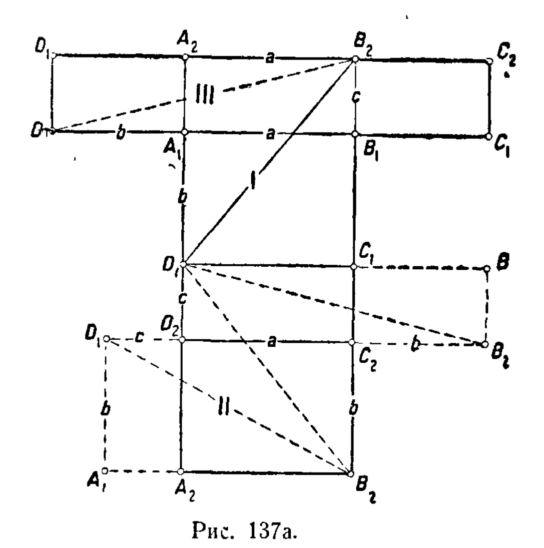


Рис. 137а.

Последнее из расстояний (IV) больше каждого из остальных трех при любых условиях, так как a, b и c — положительные числа, а потому оно отпадает. На самом деле:

$$(a+b+c)^2 > a^2 + b^2 + c^2 + 2ab;$$
$$(a+b+c)^2 > a^2 + b^2 + c^2 + 2bc;$$
$$(a+b+c)^2 > a^2 + b^2 + c^2 + 2ca.$$

Что же касается остальных трех результатов, то все они зависят от величины членов $2ab$, $2bc$ и $2ca$.

Поэтому, если $a > b$ и $a > c$, то кратчайший путь даст решение (I); это — ломаная B_2KD_1, при этом точка K найдется, если разделим сторону A_1B_1 в отношении $b:c$, считая от вершины A_1.

Для большего удобства сравнения полученных результатов вынесем в каждом из соответствующих подкоренных выражений $2abc$ за скобки, тогда получим:

$$2abc\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc} + \frac{1}{a}\right). \qquad \text{(I)}$$

— наименьшее расстояние при $a > b$ и $a > c$;

$$2abc\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}+\frac{1}{b}\right) \qquad (II)$$

— наименьшее расстояние при $b > a$ и $b > c$;

$$2abc\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}+\frac{1}{c}\right) \qquad (III)$$

— наименьшее расстояние при $c > a$ и $c > b$.

Задача принадлежит к числу занимательных задач и всегда вызывает к себе большой интерес со стороны учащихся, однако она имеет и самодовлеющее практическое значение, поскольку ставится вопрос о нахождении кратчайшего пути между двумя точками, определяемого не по прямой линии, а по ломаной. Решение и анализ задачи должны убедить учащихся, что сравнительно простая по замыслу задача нередко требует весьма сложных выкладок и рассмотрения ряда возможных ответов, которые зависят от числовых значений отдельных элементов, входящих в задачу.

Задача упрощается, если заменить параллелепипед кубом: в этом случае $a = b = c$, искомое расстояние равно $a\sqrt{5}$, и точка K — середина ребра куба.

4. Когда так рассмотрены различные призматические тела, можно еще дать определение параллелепипеда как шестигранника, все грани которого—параллелограмы, и доказать теоремы 1) о параллельности и равенстве противолежащих граней параллелепипеда, 2) о пересечении диагоналей параллелепипеда в одной точке, 3) о равенстве диагоналей прямоугольного параллелепипеда, и выразить длину его диагонали через три его измерения ($D^2 = a^2 + b^2 + c^2$).

Доказательства приведенных предложений даны в стабильном учебнике.

Необходимо затем, в целях закрепления в памяти свойств изученных тел, решить ряд задач как на построение, так и на вычисление отдельных элементов этих тел, широко используя при этом знакомые учащимся теоремы о взаимном положении прямых и плоскостей в пространстве; могут также быть использованы знания по тригонометрии, при этом вопросы, решаемые по преимуществу с помощью тригонометрии, следует переносить на уроки тригонометрии.

§ 34. Задачи на построение и вычисление, связанные с построением призм.

1. Построить изображение прямоугольного параллелепипеда, измерения которого $a = 12$ *см*, $b = 16$ *см* и $c = 24$ *см*, если известно, что он стоит на горизонтальной плоскости и грань с ребрами a и c параллельна вертикальной плоскости чертежа.

Масштаб 1:4, $\varphi = 45°$ и $k = 0{,}5$.

Решение. На рисунке размеры заданного параллелепипеда соответственно должны быть 3, 4 и 6 *см*.

Построив основание $ABCD$ — прямоугольник со сторонами 3 и 4 *см*, проводим в вершинах его A, B, C и D прямые $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = 6$ *см* перпендикулярно к плоскости прямоугольника $ABCD$

(рис. 138). Соединив затем в последовательном порядке концы A_1, B_1, C_1 и D_1 перпендикуляров, получаем искомое изображение прямоугольного параллелепипеда, ребра DA, DC и DD_1 которого обозначаются пунктиром, ребра же его передней грани — более жирными линиями, нежели остальные ребра.

2. Вычислить угол между диагональю прямоугольного параллелепипеда и плоскостью его основания, если известно, что измерения параллелепипеда равны *a*, *b* и *c*.

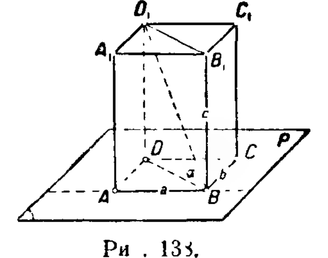


Рис. 138.

Данная задача требует от учащихся знания определения и построения угла, образуемого прямой и плоскостью. Построением одной из диагоналей параллелепипеда, например D_1B (рис. 138), и диагонали основания BD получается искомый угол, $\angle DBD_1 = \alpha$.

Следует обратить внимание учащихся на то, что проекция диагонали параллелепипеда на плоскость его основания есть диагональ основания.

Нелишне провести также и диагональ B_1D_1 верхнего основания параллелепипеда и вычертить отдельно диагональное сечение — прямоугольник DBB_1D_1. Вычисляются функции угла α по заданным измерениям a, b и c параллелепипеда.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}};$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Когда выписаны тригонометрические функции искомого угла, следует решить, какая из формул наиболее проста для вычислений; очевидно, что такова первая формула; по ней вычисляется по таблицам угол α; угол $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Полученное решение следует подвергнуть анализу. Следует поставить вопрос: может ли диагональное сечение прямоугольного параллелепипеда быть квадратом? Понятно, что это возможно, если равны стороны сечения, $DB = BB_1$, или если $a^2+b^2=c^2$, т. е. когда высота параллелепипеда равна диагонали его основания, но в таком случае $\operatorname{tg}\alpha = 1$ и $\alpha = 45°$.

Куб есть частный случай прямоугольного параллелепипеда, в котором $a = b = c$, а потому может быть поставлен и такой вопрос: может ли быть диагональное сечение куба квадратом? Ясно, что получается отрицательный ответ прямоугольник, получаемый в диагональном сечении куба, не может иметь равных сторон, так как ребро куба равно a и диагональ его основания, т. е. диагональ квадрата, не может равняться стороне квадрата a. В том случае, когда $a = b = c$, полученное выше решение $\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ запишется $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$.

Можно поставить еще вопрос: чему равен угол β между двумя диагоналями параллелепипеда? Проведя вторую диагональ B_1D параллелепипеда, убеждаемся, что $\beta_1 = 180° - 2\alpha$ и $\beta_2 = 2\alpha$

3. Построить изображение прямоугольного параллелепипеда по данной его диагонали $d = 10$ *см*, углу, образуемому этой диагональю с плоскостью основания, $\alpha = 60°$ и стороне основания $a = 4$ *см* $\left(\text{масштаб } 1:1,\ \varphi = 45° \text{ и } k = \frac{1}{2}\right)$.

Сперва строим прямоугольник, лежащий в основании параллелепипеда (рис. 139). Одна из его сторон $a = 4$ *см*, а диагональ $BD = \frac{d}{2} = 5$ *см*,

ибо она лежит в прямоугольном треугольнике DBD_1 против угла в 30°.

Построение изображения следует расположить так, чтобы диагональное сечение параллелепипеда было параллельно вертикальной плоскости чертежа; тогда оно не будет искажено. Строим прямоугольник основания на плоскости P (рис. 140), расположив его диагональ BD параллельно плоскости чертежа, и отмечаем на диагонали BD точки K и L (отрезки BK и DK могут быть и вычислены, так как $DK:KB = 16:9$ и $DK + KB = 5$). Затем строим в плоскости чертежа при точке B угол $\alpha = 60°$, где BD — одна из его сторон, и проводим $DD_1 \perp DB$; тогда отрезок $BD_1 = 2BD = 10$ *см* — диагональ параллелепипеда.

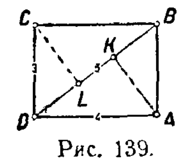


Рис. 139.

Проводим, наконец, AA_1, BB_1 и CC_1 параллельно DD_1 и откладываем отрезки $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$; соединив точки D_1, A_1, B_1, C_1 прямыми, получаем искомое изображение параллелепипеда.

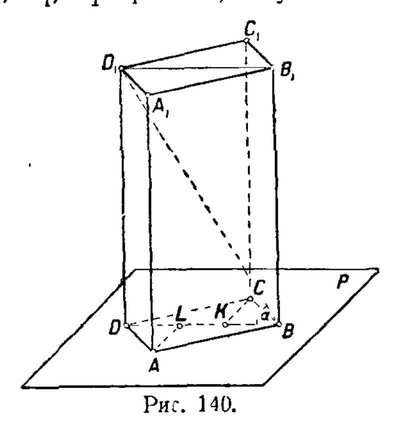


Рис. 140.

4. Если в кубе или в прямоугольном параллелепипеде провести сечение через концы трех ребер, выходящих из одной вершины, то квадрат площади треугольника сечения равен сумме квадратов площадей треугольников, которые являются проекциями треугольника сечения на плоскости трех граней. Доказать.

В самом деле, пусть дан куб $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$, и концы его ребер, исходящих из вершины D_1, соединены с вершинами A_1, C_1 и D_2, тогда площадь каждого из треугольников $D_2D_1A_1$, $D_2D_1C_1$ и $D_1A_1C_1$, отсекаемых на гранях куба, равна $\frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$, треугольник же $A_1D_2C_1$ сечения — равносторонний, его сторона равна $a\sqrt{2}$, площадь же его равна

$$\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

и

$$\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2$$

или

$$\frac{3a^4}{4} = \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{4} + \frac{a^4}{4}.$$

Если дан прямоугольный параллелепипед, то целесообразно рассмотреть сперва частный случай, например параллелепипед, измерения которого $6 \times 4 \times 5$, а затем уже решить вопрос в общем виде.

1) Решение частного случая (рис. 141):

$$\text{пл. } D_2D_1A_1 = \frac{6\cdot 5}{2} = 15 \text{ кв. ед.};$$
$$\text{пл. } D_2D_1C_1 = \frac{5\cdot 4}{2} = 10 \text{ кв. ед.};$$
$$\text{пл. } A_1D_1C_1 = \frac{4\cdot 6}{2} = 12 \text{ кв. ед.}$$
$$\text{и } 15^2 + 10^2 + 12^2 = 225 + 100 + 144 = 469.$$
$$A_1D_2 = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}\ ;\ \ D_2C_1 = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$$
$$\text{и } A_1C_1 = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}.$$

$61 < 52 + 41$, а потому треугольник сечения — остроугольный.

Для вычисления площади сечения, $\triangle A_1D_2C_1$, можно было бы воспользоваться формулой Герона; но стороны треугольника выражаются иррациональными числами, а потому вычисление по этой формуле весьма сложно, и следует использовать другой прием. Вычертив отдельно $\triangle A_1D_2C_1$, используем формулу квадрата стороны треугольника, лежащей против острого угла. Тогда

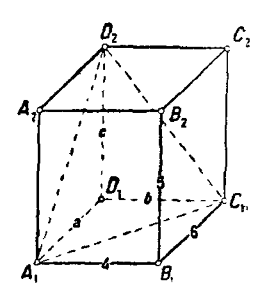


Рис. 141.

$$52 = 61 + 41 - 2x\sqrt{61},$$

откуда вычисляется отрезок $x = \frac{25}{\sqrt{61}}$, а затем находится высота h треугольника:

$$h^2 = 41 - \frac{625}{61} = \frac{1876}{61} \quad \text{и} \quad h = \sqrt{\frac{1876}{61}}.$$

После этого определяется площадь S сечения:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{61}\cdot\sqrt{\frac{1876}{61}} = \frac{1}{2}\sqrt{1876} = \sqrt{469}.$$

Итак, квадрат площади сечения равен 469, т. е. сумме квадратов площадей трех треугольников, отсекаемых сечением на гранях параллелепипеда.

2) Решение общего случая (рис. 141):

$$\text{пл. } D_2D_1A_1 = \frac{ac}{2};\quad \text{пл. } D_2D_1C_1 = \frac{bc}{2};\quad \text{пл. } A_1D_1C_1 = \frac{ab}{2};$$

отсюда

$$\left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ac}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{4}$$

Стороны треугольника сечения соответственно равны:

$$\sqrt{a^2+b^2},\ \sqrt{b^2+c^2} \ \text{и}\ \sqrt{c^2+a^2},$$

откуда

$$b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + a^2 - 2\sqrt{a^2+b^2}\cdot x$$

и

$$x = \frac{2a^2 + b^2 + c^2 - b^2 - c^2}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Находим высоту h треугольника:

$$h=\sqrt{c^2+a^2-\frac{a^4}{a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{a^2c^2+a^4+b^2c^2+a^2b^2-a^4}{a^2+b^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}}$$

и

$$S_\triangle=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},$$

и

$$S_\triangle^2=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{4},$$

что и требовалось доказать.

Теорема эта принадлежит Фаульхаберу (1580—1635).

Можно поставить вопрос более общий, об аналогичной зависимости площади плоской фигуры и площадей проекций заданной фигуры на три взаимно перпендикулярные плоскости.

Доказательство в общем виде, как и предшествующее доказательство, можно провести на основе зависимости площади проекции и площади проектируемой фигуры и $\cos\alpha$, где α—угол между плоскостью заданной фигуры и плоскостью проекции.

Следует указать учащимся на аналогию этой теоремы с теоремой Пифагора. По теореме Пифагора квадрат числа, выражающего длину гипотенузы, равен сумме квадратов чисел, выражающих длину катетов. В рассмотренной теореме квадрат числа, выражающего площадь грани прямоугольного тетраэдра, равен сумме квадратов чисел, выражающих площади трех остальных граней прямоугольного тетраэдра.

Учащиеся увидят, что вместо того, чтобы вычислять непосредственно площадь указанного сечения, можно ограничиться вычислением площадей трех отсекаемых на гранях куба или параллелепипеда треугольников, и тогда площадь сечения равна корню квадратному из суммы квадратов площадей трех треугольников. Так, если измерения прямоугольного параллелепипеда равны 1, 2 и 3 линейным единицам, то квадрат площади искомого сечения будет

$$S^2=\frac{(1\cdot2)^2+(2\cdot3)^2+(3\cdot1)^2}{4}=\frac{4+36+9}{4}=\frac{49}{4},$$

откуда

$$S=\sqrt{\frac{49}{4}}=3{,}5 \text{ кв. ед.}$$

5. Два диагональных сечения параллелепипеда пересекаются по прямой и делятся ею взаимно пополам. Доказать.

Решение. Проводим в параллелепипеде $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ диагональные сечения $A_1C_1C_2A_2$ и $A_1D_1C_2B_2$. Сечения имеют общие точки, точки A_1 и C_2, и, следовательно, общую прямую A_1C_2 — диагональ параллелепипеда, которая является общей диагональю обоих сечений, а потому она делит оба сечения пополам.

Эта теорема может быть дана учащимся для самостоятельной проработки после ознакомления их с параллелепипедом. Должно провести параллель между данной теоремой и соответствующей теоремой планиметрии: **диагонали параллелограма пересекаются в одной точке и делятся взаимно пополам.**

6. Если в четырехугольной призме два диагональных сечения делятся взаимно пополам, то это — параллелепипед. Доказать. Теорема эта соответствует теореме планиметрии: **если в четырехугольнике диагонали делятся взаимно пополам, то это — параллелограм.**

Последняя приведенная теорема стереометрии дает возможность распознавать, является ли четырехугольная призма параллелепипедом, подобно тому, как соответствующая теорема планиметрии позволяет относить к параллелограмам те из четырехугольников, диагонали которых делятся взаимно пополам.

Для самостоятельного доказательства могут быть даны теоремы:

Если два диагональных сечения параллелепипеда перпендикулярны к основанию, то параллелепипед прямой.

Если два диагональных сечения параллелепипеда — равные прямоугольники, то параллелепипед прямоугольный.

Если диагонали параллелепипеда равны, то он прямоугольный.

Если диагональные сечения четырехугольной призмы пересекаются в одной точке, то это — параллелепипед.

7. Сумма двугранных углов, последовательно образуемых боковыми гранями n-угольной призмы, равна $2d(n-2)$. Доказать.

Решение. В самом деле, если провести плоскость перпендикулярно к ребру призмы, то получаемое поперечное сечение — n-угольник; все его углы являются линейными углами двугранных углов, образуемых боковыми гранями призмы; сумма этих линейных углов равна $2d(n-2)$.

8. Сумма всех двугранных углов, прилежащих к обоим основаниям n-угольной призмы, равна $2dn$.

Решение. Действительно, двугранные углы при обоих основаниях призмы, образуемые основаниями и одной из боковых граней, являются внутренними односторонними двугранными углами, их сумма равна $2d$; число пар односторонних двугранных углов равно числу боковых граней призмы, а потому сумма всех таких двугранных углов равна $2dn$.

Следствием обеих этих теорем служит утверждение: сумма всех двугранных углов параллелепипеда равна $12d$. Вообще, сумма всех двугранных углов любой n-угольной призмы равна $4d(n-1)$.

В самом деле, сумма двугранных углов, образуемых боковыми гранями, равна $2d(n-2)$, а сумма двугранных углов при основаниях равна $2dn$, следовательно, сумма всех двугранных углов равна

$$2d(n-2)+2dn=4dn-4d=4d(n-1).$$

Для параллелепипеда имеем:

$$4d(4-1)=4d\cdot 3=12d.$$

9. а) **Плоскость, не параллельная основанию прямой призмы и пересекающая все боковые ребра ее, дает в сечении многоугольник, площадь которого больше площади основания.** Доказать.

б) **Найти отношение площади сечения к площади основания и отношение площадей двух различных сечений, проведенных в прямой призме.**

Решение. Основание прямой призмы есть проекция любого сечения, пересекающего все боковые ребра призмы, а потому

$$Q = Q_{сеч} \cdot \cos\alpha,$$

где Q — площадь основания, $Q_{сеч}$ — площадь сечения, а α — угол, образуемый плоскостями сечения и основания. Но $|\cos\alpha| \leq 1$, а потому $Q < Q_{сеч}$, или же $Q = Q_{сеч}$, если $\alpha = 0$, и тогда плоскость сечения параллельна плоскости основания.

Если Q_1 — площадь одного сечения призмы и α_1 — угол, образуемый плоскостью этого сечения и плоскостью основания призмы, а Q_2 — площадь другого сечения призмы и α_2 — угол, образуемый плоскостью этого сечения с плоскостью основания призмы, то $Q_1 = \frac{Q}{\cos\alpha_1}$ и $Q_2 = \frac{Q}{\cos\alpha_2}$, откуда

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} = \frac{\sec\alpha_1}{\sec\alpha_2},$$

т. е. площади сечений пропорциональны секансам углов, образуемых этими сечениями с плоскостью основания призмы.

Данная теорема вполне доступна учащимся для самостоятельной проработки. *Следует только предварительно напомнить зависимость между* площадью плоской фигуры и площадью ее проекции на плоскость.

10. Построить отрезок, равный ребру куба, если даны: 1) длина его диагонали *D*, 2) периметр *P* его диагонального сечения.

Решение. Эти задачи решаются методом алгебраического анализа; их решение позволит учащимся возобновить в памяти задачи на построение по планиметрии.

1) Обозначив ребро куба через x, имеем $D = x\sqrt{3}$, откуда

$$x = \frac{D}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{D^2}{3}} = \sqrt{D \cdot \frac{D}{3}},$$

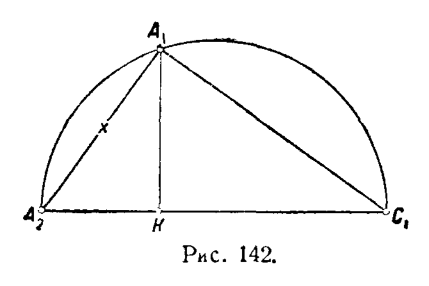


Рис. 142.

т. е. ребро куба есть средняя пропорциональная между диагональю куба и одной третьей этой диагонали.

Находим x построением. Пусть диагональное сечение куба лежит в плоскости чертежа (рис. 142). Отложив отрезок A_2C_1 и разделив его на три равные части, имеем: $A_2K = \frac{D}{3}$. Полуокружность, построенная на A_2C_1 как на диаметре, пересекается перпендикуляром KA_1 к прямой A_2C_1 в точке A_1; отрезок A_2A_1 равен ребру x куба, ибо $x = \sqrt{D \cdot \frac{D}{3}}$; в то же время A_1C_1 — диагональ основания куба.

2) Пусть ребро куба равно x. Диагональное сечение куба — прямоугольник со сторонами x и $x\sqrt{2}$, а потому $2x + 2x\sqrt{2} = P$, откуда

$$x = \frac{P}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{P(\sqrt{2}-1)}{2} = \frac{\sqrt{2P \cdot P} - P}{2}.$$

Строя сперва отрезок $y=\sqrt{2P\,P}$, а затем отрезок $y-P$, находим отрезок x, равный половине отрезка $y-P$.

11. Построить изображение куба по d — диагонали его грани $\left(\text{угол сокращения } \varphi=45^\circ \text{ и коэфициент сокращения } k=\frac{2}{3}\right)$.

Решение. Строим основание куба — квадрат — по его диагонали d (рис. 143): это квадрат $A_1B_1C_1D_1$ и A_1C_1 — его диагональ d. Принимая во внимание, что $d=x\sqrt{2}$, находим, что

$$x=\frac{d}{\sqrt{2}}=\frac{d\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\frac{2d^2}{4}}=\sqrt{d\cdot\frac{d}{2}},$$

т. е. ребро куба x есть средняя пропорциональная между d и $\frac{d}{2}$. Чтобы построить x, следует продолжить A_1C_1 на отрезок $C_1M=\frac{d}{2}$ и построить на отрезке A_1M как на диаметре полуокружность, на которой лежат вершина C_2 и центр O_2 верхнего основания куба, так как $C_1C_2=O_1O_2=x$ — ребру куба. Затем проводим через вершины A_1, B_1, C_1, D_1 прямые, параллельные O_1O_2, и откладываем на них отрезки $A_1A_2=B_1B_2=C_1C_2=D_1D_2=O_1O_2=x$; получаем таким построением искомое изображение куба.

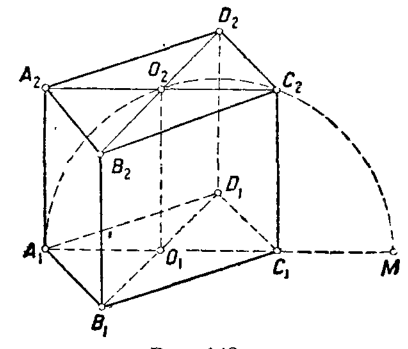


Рис. 143.

Следует отметить, что на рис. 143 диагональное сечение куба дано в плоскости чертежа, а потому его размеры не сокращаются; при таком расположении диагонального сечения куба отрезки C_1C_2 и O_1O_2 получатся на рисунке построением полуокружности в действительную величину.

12. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b и c. Через одну из сторон основания проведена плоскость, пересекающая противолежащую грань и проходящая через ее середину. Построить развертки двух тел, на которые этой плоскостью делится параллелепипед ($\varphi=45^\circ$ и $k=0{,}5$).

На рисунке 144 даны изображения параллелепипеда с проведенным в нем сечением и две искомые развертки.

Построение разверток — самостоятельная работа учащихся. Когда вычерчены развертки обеих частей, на которые рассекается плоскостью параллелепипед, можно предложить учащимся построить их модели; для этого следует вырезать развертки, оставив некоторый запас картона для склеивания, и склеить их. Приложив затем полученные модели друг к другу заштрихованными общими гранями, учащиеся убеждаются, что части составляют параллелепипед, измерения которого равны a, b и c.

13. Построить изображение правильной треугольной призмы, все ребра которой равны, и построить в ней сечение, проходящее

через сторону основания призмы и середину отрезка, концами которого служат центры оснований.

В целях лучшего уяснения учащимися взаимного положения отдельных элементов того пространственного образа, изображение которого надлежит им построить, следует использовать геометрический ящик.

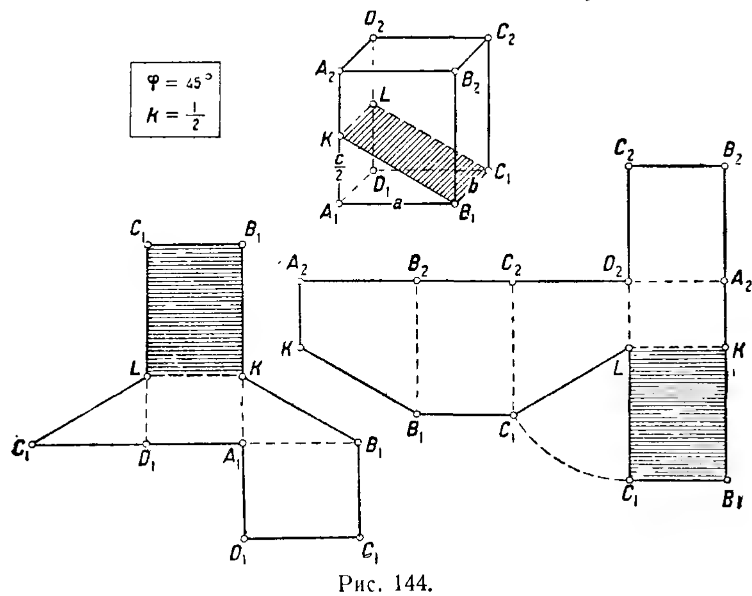


Рис. 144.

Для построения требуемого изображения треугольной призмы вычерчивают сперва правильный треугольник (рис. 145а), лежащий в основании призмы, а затем лучше строить на плоскости P правильный треугольник, расположив его так, чтобы высота его CD была параллельна вертикальной плоскости чертежа; пусть это будет треугольник $A_1C_1B_1$ (рис. 145б).

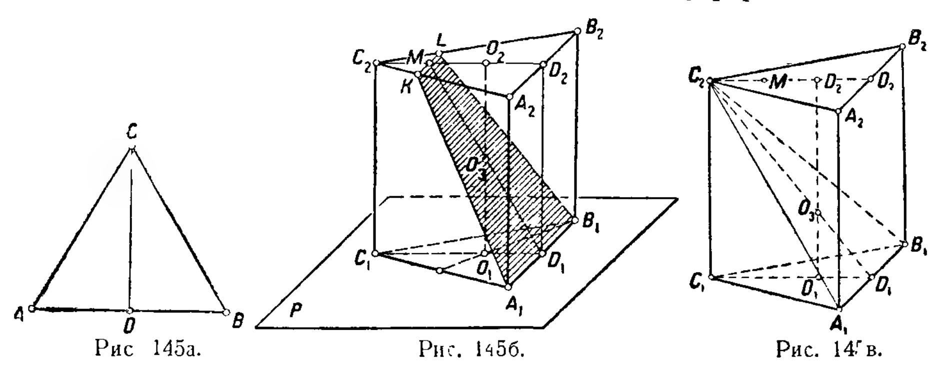


Рис 145а. Рис. 145б. Рис. 145в.

Затем проводят через вершины A_1, B_1 и C_1 прямые, перпендикулярные к плоскости построенного треугольника $A_1B_1C_1$; понятно, что эти прямые следует провести перпендикулярно к прямой C_1D_1 или к нижнему или верхнему краю плоскости P; на перпендикулярах откладывают

равные отрезки, так что $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = AB$ — стороне треугольника ABC; если затем соединить прямыми концы перпендикуляров A_2, B_2 и C_2, то получится искомое изображение призмы.

После этого следует провести в верхней грани призмы медиану C_2D_2 и отложить на ранее построенной медиане (высоте) C_1D_1 отрезок $O_1D_1 = \frac{1}{3}C_1D_1$, на медиане C_2D_2 — отрезок $O_2D_2 = \frac{1}{3}C_2D_2$ и соединить прямой точки O_1 и O_2, которыми определяется положение оси O_1O_2 призмы; если, наконец, провести D_1D_2, то получится сечение призмы, проходящее через ребро C_1C_2 призмы, ось O_1O_2 и медиану (высоту) C_1D_1 основания.

Отметив еще середину O_3 оси O_1O_2, приступают к построению искомого сечения. Согласно условию, ему принадлежат точки O_3 и D_1, лежащие в плоскости $C_1D_1D_2C_2$, а потому и прямая D_1O_3, проходящая через эти точки, лежит в плоскости сечения; эта прямая D_1O_3, продолженная за точку O_3, пересечет в точке M медиану C_2D_2 верхнего основания $A_2B_2C_2$ призмы.

Желательно отметить, что $O_2M = O_1D_1$, ибо $\triangle O_1O_3D_1 = \triangle O_2O_3M$ по катету и острому углу, а потому $O_2M = \frac{1}{3}C_2D_2 = MC_2 = O_2D_2$, так как $O_1D_1 = \frac{1}{3}C_1D_1$. Понятно, что плоскость сечения пересекает плоскости параллельных оснований призмы по параллельным прямым, а потому, если провести через точку M прямую KL, параллельную A_1B_1 или A_2B_2, и соединить затем точки пересечения K и L этой прямой со сторонами C_2A_2 и C_2B_2 верхнего основания соответственно с вершинами A_1 и B_1 нижнего основания призмы, то получится искомое сечение A_1B_1LK; это сечение — равнобедренная трапеция, ее основания — A_1B_1 и KL, и при этом $KL = \frac{1}{3}A_1B_1$.

Нередко случается, что учащиеся, недостаточно внимательно вникая в условия задачи, полагают, что треугольник $A_1B_1C_2$ (рис. 145в), получаемый соединением вершин A_1 и B_1 с вершиной C_2, является искомым сечением. Неправильность такого построения и заключения должна быть вскрыта, для чего следует рассмотреть прямоугольные треугольники $O_3O_2C_2$ и $O_3O_1D_1$; в этих треугольниках, согласно условию, $O_1O_2 = O_3O_1$, равны также углы при общей вершине O_3, как противоположные, а потому треугольники равны; из равенства треугольников в свою очередь следует, что $O_1D_1 = O_2C_2$, но $O_1D_1 = \frac{1}{3}$ высоты треугольника $A_1B_1C_1$, а $O_2C_2 = \frac{2}{3}$ высоты треугольника $A_2B_2C_2$, равного треугольнику $A_1B_1C_1$; понятно, что в силу указанного O_1D_1 не может быть равно O_2C_2, а потому предположение, что искомое сечение пройдет через вершину C_2, неверно; оно проходит, как было указано выше, через точку M — середину отрезка O_2C_2. Следует отметить, что в том случае, если бы сечение проходило через вершину C_2 призмы, треугольники $C_2O_2O_3$ и $O_3O_1D_1$ были бы только подобны, и тогда точка O_3 не была бы серединой отрезка O_1O_2.

Из подобия треугольников следует, что в этом случае $\frac{O_2O_3}{O_3O_1} = \frac{C_2O_2}{D_1O_1} = \frac{2}{1}$ и, таким образом, плоскость сечения пересекает ось призмы на расстоянии, равном $\frac{1}{3}$ оси, считая от основания призмы.

Весьма полезно использовать данную задачу на построение для решения задачи на вычисление, а именно — вычислить площадь сечения, если известно, что каждое ребро данной призмы равно a.

Решение. Сечение A_1KLB_1 — трапеция; основание $A_1B_1 = a$, основание $KL = \frac{a}{3}$; высота MD_1 трапеции вычисляется из треугольника $O_3O_1D_1$, в котором $O_1O_3 = \frac{1}{2}a$, $O_1D_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, а потому

$$O_3D_1 = \frac{MD_1}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{36}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Находим площадь сечения:

$$S_\triangle = (A_1B_1 + KL) \cdot \frac{MD_1}{2} = \left(a + \frac{a}{3}\right) \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{9} \text{ кв. ед.}$$

14. Построить изображение куба и провести в нем через центр куба сечение, параллельное диагоналям двух смежных боковых его граней.

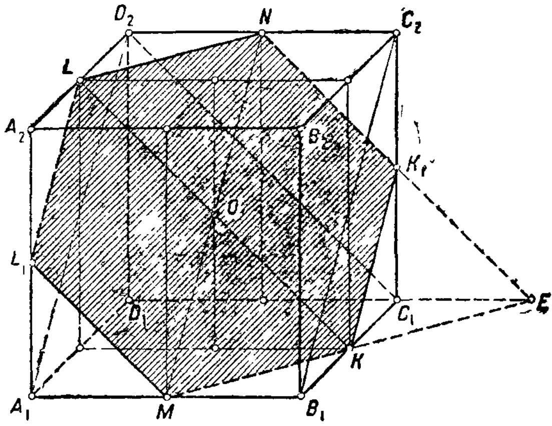


Рис 146.

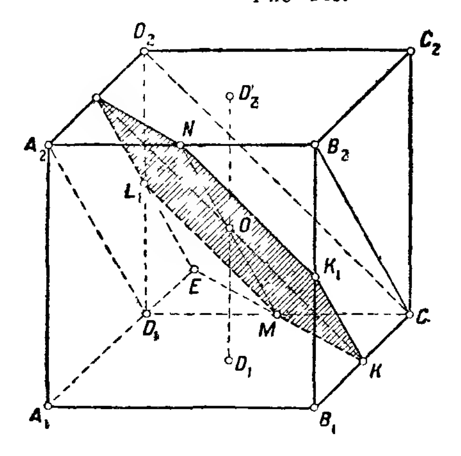


Рис. 147.

Следует рассмотреть два случая: 1) когда диагонали B_1C_2 и C_1D_2 боковых граней куба не пересекаются (рис. 146) и 2) когда диагонали C_1B_2 и C_1D_2 пересекаются (рис. 147).

В первом случае следует провести через центр O куба прямые KL и MN параллельно данным диагоналям, для чего проводят среднюю линию MN диагонального сечения $A_1B_1C_2D_2$ и среднюю линию KL диагонального сечения $B_1C_1D_2A_2$. Ясно, что прямыми KL и MN однозначно определится искомая плоскость сечения. Построение сечения, проходящего через точки K, L, M и N, не требует особых указаний. В сечении получается правильный шестиугольник, сторона которого равна $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, где a — ребро куба.

Во втором случае выполняется аналогичное построение.

Такого рода задачи на построение должны быть использованы при решении задач на вычисление. Учащиеся должны научиться по данным „числовой" задачи построить пространственную фигуру в соответствии с числовыми данными, соблюдая принятый масштаб, коэфициент и угол сокращения;

не следует ограничиваться только тем, что учащиеся дают изображение тел так, как они им „кажутся"; целесообразно, как уже не раз отмечалось, пользоваться геометрическим ящиком, если построение изображения пространственной фигуры представляет трудности.

15. *Теорема.* Если два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены в пространстве так, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, проходящие через соответственные вершины треугольников, пересекаются в одной точке O, то точки пересечения K, L и M (если таковые имеются) соответственных сторон A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 данных треугольников лежат на одной прямой (рис. 148).

Эта теорема принадлежит Дезаргу (1593—1662).

Она не входит в программу элементарного курса геометрии и может служить темой кружковых занятий с учащимися. Одно из значений теоремы — проверка с ее помощью правильности выполненного построения сечения, как будет указано ниже.

Пусть даны треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ (рис. 148) и пусть прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 при своем продолжении пересекаются в точке O.

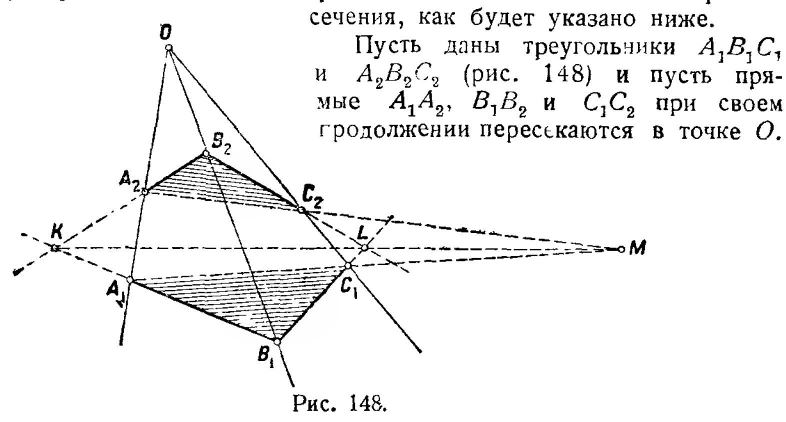


Рис. 148.

Отсюда следует, что стороны A_1B_1 и A_2B_2 лежат в плоскости, однозначно определяемой двумя пересекающимися прямыми A_1O и B_1O; стороны B_1C_1 и B_2C_2 — в плоскости, однозначно определяемой двумя пересекающимися прямыми B_1O и C_1O, и, наконец, стороны C_1A_1 и C_2A_2 в плоскости, однозначно определяемой прямыми C_1O и A_1O; эти три плоскости — A_1OB_1, B_1OC_1 и C_1OA_1 — попарно пересекаются и имеют одну общую точку O.

Допустим, что стороны A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 данных двух треугольников не параллельны, и пусть они пересекутся соответственно в точках K, L и M. Точки K и L принадлежат плоскости треугольника $A_1B_1C_1$ и плоскости треугольника $A_2B_2C_2$, следовательно, прямая KL принадлежит обеим плоскостям, т. е. она является прямой, по которой пересекаются плоскости обоих треугольников. Точно так же точки L и M, а следовательно, и прямая LM, принадлежат плоскостям обоих треугольников. Прямые KL и LM должны составить одну прямую, так как в противном случае плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ имели бы две различные прямые, по которым они пересекались бы, что невозможно, потому что через две пересекающиеся или две параллельные прямые можно провести только одну плоскость, и тогда плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ должны были бы слиться. Следовательно, KL и LM составляют одну прямую; теорема доказана.

Вывод не зависит от того, какой угол друг с другом образуют плоскости треугольников AB_1C_1 и AB_2C_2; вывод верен и тогда, когда угол, образуемый плоскостями треугольников, равен нулю.

Таким образом, эта теорема справедлива и для геометрии на плоскости.

Теорема справедлива в том случае, когда хотя бы одна из сторон одного треугольника параллельна стороне другого, положим A_2C_2 и A_1C_1. В этом случае прямая KL A_1C_1 и $KL \parallel A_2C_2$ и потому A_1C_1 и A_2C_2. параллельны между собой и прямой KL.

Если же две стороны треугольника $A_1B_1C_1$ параллельны двум сторонам треугольника $A_2B_2C_2$, то плоскости обоих треугольников параллельны, откуда следует, что все три пары сторон — A_1B_1 и A_2 $_2$, B_1C_1 и B_2C_2. C_1A_1 и C_2A_2 — параллельны и, следовательно, в конечной части плоскости не существует искомых точек пересечения.

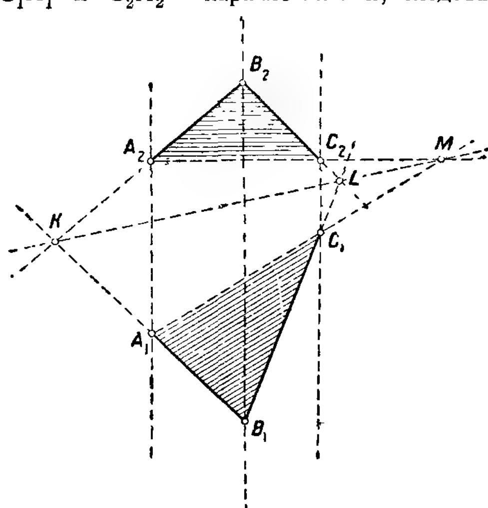


Рис. 149.

16. *Обратная теорема.* Если в пространстве даны два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ и точки пересечения K, L и M прямых A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 лежат на одной прямой, то прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной общей точке.

Рассматривая треугольники A_2KA_1 и C_2LC_1 (рис. 148), видим, что они удовлетворяют прямой теореме, ибо прямые A_2C_2, KL и A_1C_1 пересекаются в точке M, а потому стороны их попарно пересекаются, а именно: A_2K и C_2L в точке B_2, KA_1 и LC_1 в точке B_1, A_1A_2 и C_1C_2 в точке O; эти три точки, B_2, B_1 и O, лежат на одной прямой OB_2B_1; треугольники B_2B_1K и C_2C_1M также удовлетворяют прямой теореме, их стороны попарно пересекаются, а именно: B_2B_1 и C_2C_1 в точке O, B_1K и C_1M в точке A_1, KB_2 и MC_2 в точке A_2; эти три точки лежат на одной прямой OA_1A_2, проходящей через точку O; наконец, и треугольники B_2LB_1 и A_2MA_1 удовлетворяют условиям прямой теоремы, их стороны пересекаются; а именно: B_2L и A_2M в точке C_2, LB_1 и MA_1 в точке C_1, наконец, B_1B_2 и A_1A_2 в точке O; эти три точки лежат на одной прямой C_2C_1O, проходящей через точку O. Итак, все три прямые, A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, проходящие через соответственные вершины данных двух треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, пересекаются в одной точке O.

Следует отметить, что прямая теорема остается справедливой и в том случае, когда прямые, проходящие через соответственные вершины треугольников, окажутся параллельными и, таким образом, не пересекаются (рис. 149); доказательство то же, что и для случая, когда прямые пересекаются в точке O.

Приведенная теорема и ей обратная содействуют развитию пространственных представлений, ее полезно проработать в кружках. Преподавателю теорема дает возможность, как уже было сказано, проверять правильность сделанного построения и облегчает выполнение многих сложных построений сечений, например в пирамидах.

§ 35. Задачи на построение и вычисление, связанные с сечениями куба.

1. Построение сечений куба и вообще любого многогранника плоскостью, проходящей через три точки, лежащие на ребрах куба, было уже рассмотрено. В настоящем разделе вопрос о проведении сечений в кубе ставится несколько шире, а именно: точки, однозначно определяющие положение плоскости сечения куба, расположены или на его гранях или внутри куба. Естественно, что такие задачи в значительной степени способствуют развитию пространственного представления учащихся. Приводимые ниже задачи на построение, конечно, не могут служить предметом изучения на уроках в классе, для этого нет нужного числа часов по плану; однако, они могут служить темами для общей кружковой работы учащихся или темами для рефератов отдельных, наиболее успевающих учащихся. Нужно указать, что эти задачи требуют от учащихся много внимания и большой четкости и аккуратности в самом выполнении; рекомендуется изготовить сперва с помощью геометрического ящика модель заданной фигуры, а затем уже построить изображение фигуры на двумерной плоскости. Точки, определяющие положение плоскости сечения, могут быть взяты и вне куба, однако, такого рода построения нами здесь не рассматриваются.

Задача считается решенной, если прямые, по которым плоскость пересекает грани куба, образуют на его поверхности замкнутый контур. В целях большей наглядности рекомендуется отмечать контур сечения каким-либо цветным мелком или карандашом и заштриховывать фигуру сечения, если этим не нарушается четкость рисунка.

2. Задачи на сечения куба, проводимые через три точки, лежащие 1) на гранях куба, 2) внутри куба.

1) Провести в кубе сечение, проходящее через точки K, L и M, лежащие на трех последовательно расположенных гранях куба. Рассмотрим два из возможных положений точек K, L и M.

а) Пусть точки K, L и M лежат на левой боковой грани, на передней грани и на правой боковой грани куба.

Проводим через данные точки K, L и M в соответствующих гранях куба прямые K_1K_2, L_1L_2 и M_1M_2 параллельно боковым ребрам куба (рис. 150); соединив точки K_1, L_1 и M_1, а также точки K_2, L_2 и M_2, лежащие на плоскостях оснований куба, получим треугольную призму, на ребрах которой лежат данные точки K, L и M. В треугольной призме проводим сечение через данные точки K, L и M, получим треугольник KLM, плоскость которого совпадает с плоскостью искомого сечения, однозначно определяемого данными тремя точками K, L и M.

Прямые LM и L_2M_2, лежащие в одной плоскости, в грани $L_1M_1M_2L_2$ призмы, пересекаются в точке *1*, принадлежащей и плоскости грани $L_1M_1L_2M_2$ и плоскости сечения. Прямые KM и K_2M_2, лежащие в одной плоскости, в грани $K_1M_1M_2K_2$ призмы, пересекаются в точке *2*, принадлежащей и

плоскости грани $K_1M_1M_2K_2$ и плоскости сечения. Прямая, проходящая через точки 1 и 2, принадлежит, таким образом, плоскости сечения и плоскости верхней грани куба; по этой прямой пересекаются обе эти плоскости; она — след плоскости сечения на плоскости верхнего основания. Следовательно, прямая B_2C_2, лежащая в плоскости верхнего основания, пересекает линию сечения 1—2 в точке 3. Точка 3 принадлежит и плоскости правой боковой грани куба, следовательно, и прямая $M3$, пересекающая правую боковую грань куба по прямой B_3C_3, лежит в плоскости сечения.

Точки B_3 и L лежат в плоскости сечения, а потому и прямая B_3A_3 лежит в ней; A_3K лежит в плоскости сечения, а потому точки D_3 и C_3 лежат в плоскости сечения и прямая D_3C_3 лежит в плоскости сечения, и сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, L и M, есть

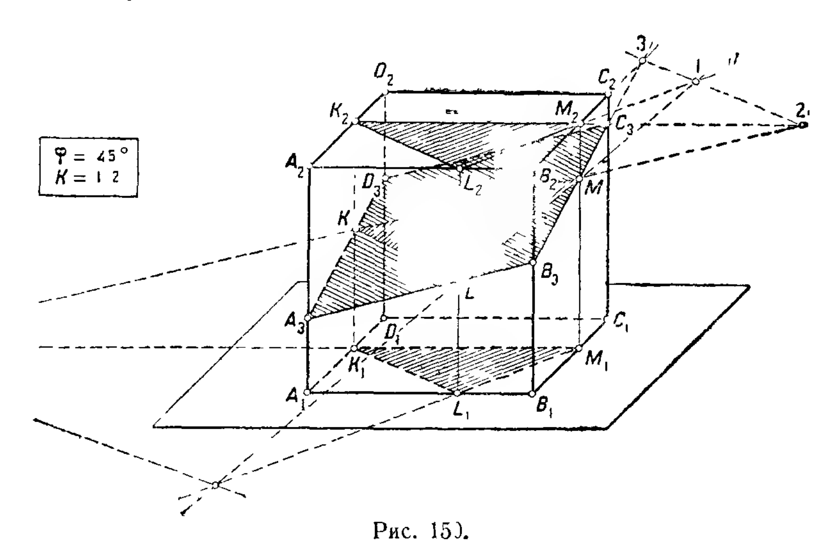


Рис. 150.

четырехугольник $A_3B_3C_3D_3$; этот четырехугольник — параллелограм, так как $A_3D_3 \parallel B_3C_3$ и $A_3B_3 \parallel C_3D_3$.

Если прямые KL и K_1L_1, как это имеет место в данном случае, лежат в одной плоскости и не пересекаются, т. е. если $KL \parallel K_1L_1$, то прямая, проходящая через точки 1 и 2, должна быть параллельной KL, и точка их пересечения находится в бесконечности.

В нашем примере прямые K_2K_1, L_2L_1 и M_2M_1, проходящие через соответствующие вершины треугольников KLM и $K_2L_2M_2$, параллельны и продолжения соответственных сторон треугольников сечения и оснований пересекаются в точках, лежащих на одной прямой. Одна из этих прямых проходит через точки 1 и 2 и лежит в плоскости верхнего основания куба, другая лежит в плоскости P и проходит через точки пересечения сторон треугольников KLM и $K_1L_1M_1$; обе эти прямые параллельны, так как параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью — плоскостью сечения — по прямым параллельным.

б) Пусть точки K, L и M расположены соответственно на гранях куба: левой боковой, нижней и верхней.

Проводим через точки K, L и M (рис. 151) к плоскости основания перпендикуляры K_1K_2, LL_2 и MM_1; первый из перпендикуляров, K_1K_2, лежит в плоскости левой боковой грани, остальные два, LL_2 и MM_1, проходят внутри куба. Основания этих перпендикуляров служат вершинами оснований прямой треугольной призмы, которая в сечении с искомой плоскостью дает треугольник KLM. Прямые MK и M_1K_1 лежат в плоскости грани призмы $K_1M_1MK_2$ и пересекаются в точке O, принадлежащей плоскости сечения, плоскости грани $K_1M_1MK_2$ и плоскости основания куба. Значит, прямая OL также принадлежит и плоскости сечения и плоскости основания, и AB — одна из сторон искомого сечения; проведя через точки B и K прямую, получим, что BC — также одна из сторон сечения. Если

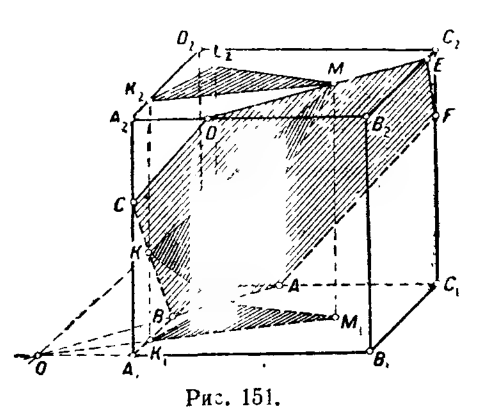


Рис. 151.

через точку M верхней грани провести прямую $DE \parallel AB$, то DE — одна из сторон сечения, так как параллельные грани — нижнее и верхнее основания куба — пересекаются плоскостью сечения по прямым параллельным; соединив точки C и D, получим четвертую сторону сечения; проведя наконец, $AF \parallel CD$ и соединив точки F и E, получим $FE \parallel BC$. Сечение дает шестиугольник $ABCDEF$, противолежащие стороны которого попарно параллельны.

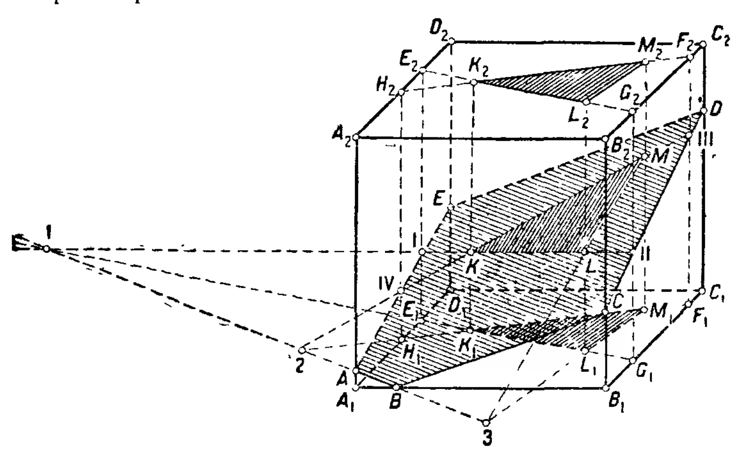


Рис. 152.

2) Внутри куба даны точки K, L и M, отстоящие от плоскости нижнего основания на расстоянии KK_1, LL_1 и MM_1. Провести сечение куба через данные точки K, L и M.

Точки K, L и M лежат соответственно на перпендикулярах K_1K_2, L_1L_2 и M_1M_2 к плоскостям основания куба (рис. 152). Соединив точки K,

L и M, а также точки K_1, L_1 и M_1 прямыми, получим прямую треугольную призму, которая пересекается плоскостью искомого сечения в точках K, L и M и дает в сечении треугольник KLM. Грань $K_1L_1L_2K_2$ пересекает левую и правую грани куба по прямым E_1E_2 и G_1G_2, при этом $E_1E_2 \parallel G_1G_2$ и прямая KL сечения дает, таким образом, на гранях куба соответственные точки I и II. Грань $K_1M_1M_2K_2$ пересекает плоскости боковых граней — левой и правой — по прямым F_1F_2 и H_1H_2, при этом $F_1F_2 \parallel H_1H_2$ и прямая KM сечения пересекает, таким образом, грани куба в точках III и IV.

Проводим на гранях через точки II и III и I и IV прямые CD и AE; они параллельны и принадлежат плоскостям и сечения и граней куба; они — стороны искомого сечения Точки D и E лежат на плоскости задней грани куба и DE — сторона сечения. Проводя затем $CB \parallel DE$ и соединив точки B и A, получим искомое сечение — пятиугольник $ABCDE$.

Для проверки правильности сделанного построения находим точки *1*, *2* и *3* пересечения соответствующих сторон треугольников KLM и $K_1L_1M_1$; эти точки должны лежать на одной прямой в плоскости нижнего основания куба, и прямая эта должна пересечь основание куба по одной и той же прямой.

Приведенными задачами на построение не исчерпаны возможные задачи подобного рода; их следует давать в соответствующих разделах курса, учитывая подготовку учащихся.

При решении стереометрической задачи на вычисление необходимо требовать от учащихся выполнения схематического построения требуемой по условию задачи фигуры или тела; при этом, если не в каждом случае, то все же время от времени нужно требовать построения изображения фигуры с учетом всех данных задачи.

Задачи и вопросы.

1. Можно ли всякую четырехугольную призму назвать параллелепипедом?

2. Построить изображение правильной треугольной призмы, сторона основания которой a и высота H. Провести в ней сечение через боковое ребро перпендикулярно к противолежащей боковой грани и вычислить площадь сечения.

3. В правильной треугольной призме через сторону ее основания $a = 12$ *см* провести сечение, образующее с плоскостью основания угол $\alpha = 30°$. Вычислить площадь сечения.

4. Расстояния между ребрами наклонной призмы равны $a = 3$ *см*, $b = 4$ *см* и $c = 5$ *см*. Вычислить двугранные углы между гранями призмы.

5. Построить изображение правильной шестиугольной призмы

$$A_1B_1C_1D_1E_1F_1A_2B_2C_2D_2E_2F_2.$$

Через точки K, M и O, взятые на ребрах A_1A_2, C_1C_2 и E_1E_2 призмы, провести плоскость и определить форму сечения.

6. Пользуясь условиями задачи 4, вычислить угол между плоскостью сечения и плоскостью основания, если известно, что площадь основания призмы $Q = 12$ *см*².

7. В кубе $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ провести сечение, проходящее через концы трех ребер, исходящих *из вершины D_1 нижнего основания; провести затем* сечение, проходящее через концы трех ребер, исходящих из диаметрально противолежащей вершины C_1 куба. Определить вид третьего сечения, отстоящего на равное расстояние от первых двух сечений и им параллельного, и найти отношение площади третьего сечения к площади одного из первых двух сечений.

8. Построить изображение прямой треугольной призмы, все ребра которой равны. Через середину одного из боковых ребер и середины двух сторон оснований, пересекающих данное боковое ребро и не параллельных между собой,

провести сечение. Определить вид сечения и вычислить его стороны, углы и площади если известно, что ребро призмы равно a.

9. В прямоугольном параллелепипеде с квадратным основанием найти кратчайшее расстояние от стороны его основания $a = 15$ *см* до не пересекающей эту сторону диагонали параллелепипеда, если известно, что высота параллелепипеда $b = 20$ *см*.

Указания к задачам и вопросам.

1. Четырехугольную призму можно назвать параллелепипедом только при условии, если ее основанием служит параллелограм. Четырехугольная призма, вообще говоря, может иметь своим основанием любой четырехугольник, например трапецию, а тогда она не может быть названа параллелепипедом.

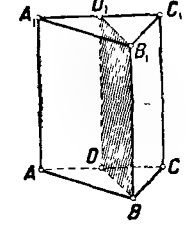


Рис. 153.

2. Сперва следует построить изображение правильного треугольника — основания призмы (рис. 153); затем – боковые ее ребра; они перпендикулярны к плоскости основания, и каждое из них равно H.

Надо указать учащимся, что в целях большей четкости изображения следует расположить основание призмы так, чтобы основание AC треугольника было параллельно вертикальной плоскости чертежа, вершина же B была направлена к зрителю. Если затем провести $BD \perp AC$ и $B_1D_1 \perp A_1C_1$, а также соединить точку D с точкой D_1, то получится фигура искомого сечения — прямоугольник BB_1D_1D. Сечение это перпендикулярно грани ACC_1A_1, ибо оно проходит через перпендикуляр BD (или B_1D_1) к грани A_1ACC_1, а BD (или B_1D_1) лежит в плоскости ABC (или $A_1B_1C_1$), перпендикулярной к плоскости грани A_1ACC_1.

Площадь сечения — прямоугольника $BB_1D\,D$ — равна

$$BD \cdot BB_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot H = \frac{a \cdot H\sqrt{3}}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

Если желательно получить искомое сечение в неискаженном виде, то следует поставить призму на горизонтальной плоскости так, чтобы плоскость сечения была параллельна вертикальной плоскости чертежа; для этого необходимо расположить треугольник основания на горизонтальной плоскости т к, чтобы высота его BD была параллельна вертикальной плоскости чертежа, как это показано на рис. 154.

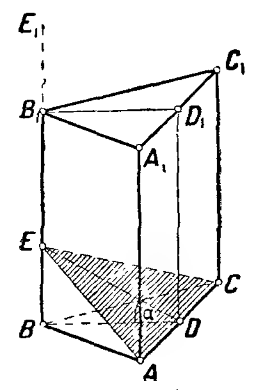


Рис. 154.

3. Изображение призмы следует построить, как показано на рис. 154; высоты BD и B_1D_1 оснований параллельны вертикальной плоскости чертежа. Если затем построить на прямой BD при точке D угол $\alpha = 30°$ и соединить точку E с вершинами A и C основания, то получится искомое сечение — равнобедренный треугольник AEC. При таком расположении изображения призмы данный угол α получается без искажения; $\angle EDB$ — линейный угол двугранного угла, образуемого плоскостью сечения AEC и плоскостью основания ABC. Целесообразность такого построения должна быть разъяснена учащимся.

Для вычисления площади сечения используется теорема: площадь проекции плоской фигуры равна площади проектируемой фигуры, умноженной на косинус угла, образуемого их плоскостями.

Итак,

$$\text{пл. } AEC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{4 \cdot \sqrt{3}} = \frac{a^2}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

Надо обратить внимание учащихся и на то, что $BE = \frac{1}{2} DE = \frac{a\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{2}$, т. е. половине стороны основания; этот результат позволяет

сделать вывод, что $\triangle ABE = \triangle CBE = \triangle ADB$; эти треугольники прямоугольные и равны по двум равным катетам.

Нелишне провести исследование, как изменится площадь сечения по мере увеличения угла α, или, иначе говоря, по мере того, как вершина E сечения будет перемещаться вдоль ребра BB_1 по направлению к вершине B_1 призмы. Понятно, что сечения представляют собою равнобедренные треугольники, ибо равны проекции сторон EA и EC на плоскость основания призмы. Когда точка E продвинется за вершину B_1 призмы и тем самым окажется на продолжении ребра BB_1, то в сечении получится уже не равнобедренный треугольник, а равнобедренная трапеция. По мере увеличения угла α и приближения его к 90°, размеры сечения все время будут увеличиваться, пока, наконец, при $\alpha = 90°$ плоскость сечения не совпадет с плоскостью боковой грани ACC_1A_1 призмы.

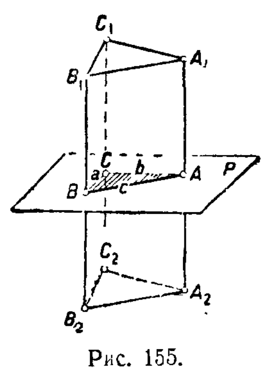


Рис. 155.

4. Для построения изображения заданной призмы нужно построить сперва ее поперечное сечение — треугольник со сторонами a, b и c (рис. 155). В частном случае, когда $a = 3$, $b = 4$ и $c = 5$, сечение есть прямоугольный треугольник, так как $5^2 = 3^2 + 4^2$. Затем проводят к плоскости сечения ABC через точки A, B и C перпендикуляры и откладывают на них по одну сторону от плоскости ABC произвольной длины и неравные между собою отрезки AA_1, BB_1 и CC_1. Если после этого отложить $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$, то получится изображение искомой наклонной треугольной призмы $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ с заданным поперечным сечением — треугольником ABC; стороны этого треугольника равны расстояниям между соответственными ребрами призмы; его углы равны линейным углам двугранных углов, образуемых боковыми гранями призмы.

Необходимо отметить, что условия данной задачи таковы, что можно построить бесчисленное множество наклонных призм с заданным поперечным сечением; в частном случае и прямая призма с основанием ABC удовлетворяет заданному условию.

Данная задача приведена для того, чтобы показать учащимся, насколько целесообразно бывает начинать вычерчивать изображение фигуры с вычерчивания перпендикулярного сечения, если таковое задано.

Понятно, что углы треугольника сечения, а следовательно, и искомые двугранные углы находятся средствами тригонометрии. Действительно, в соответствии с заданными числовыми значениями a, b и c находим: $\angle C = 90°$, $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$ и $A = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}$ и $\angle B = 90° - A$.

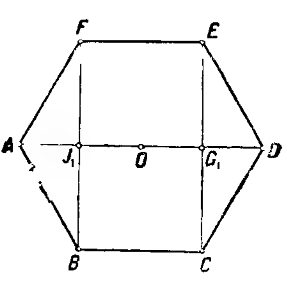


Рис. 156.

Можно предложить учащимся в целях проверки правильности сделанного ими построения убедиться в том, что точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 лежат на одной прямой.

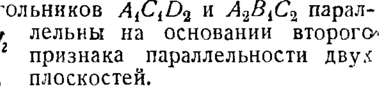
5. Построив шестиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — изображение правильного шестиугольника $ABCDEF$ — и перпендикуляры $A_1A_2 = B_1B_2 = \ldots$ к плоскости шестиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, получаем, соединив в последовательном порядке концы перпендикуляров — точки A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, — изображение правильной шестиугольной призмы (рис. 156 и 157). Отметив на соответствующих ребрах призмы точки K, M и O и соединив их прямыми, замечаем, что прямые KO, KM и MO не лежат на гранях призмы. Чтобы получить сечение призмы, в котором лежат точки K, M и O, проведем сперва диагональное сечение $A_2A_1E_1E_2$, в котором лежат точки K и O; затем продолжим эту плоскость, а также плоскость грани $C_1D_1D_2C_2$; эти плоскости пересекутся по прямой H_1H_2, на которой лежит и точка пересечения R прямой KO с прямой H_1H_2. Точки R и M лежат в искомой плоскости сечения и в плоскости грани $C_1D_1D_2C_2$, а потому в обеих плоскостях лежит и прямая MR, а следовательно, и точка пересечения N прямой RM и ребра D_1D_2 принадлежит плоскости искомого сечения, а также отрезок MN прямой MR на грани $C_1D_1D_2C_2$. Находим и NO — отрезок, принадлежащий сечению.

Плоскость искомого сечения пересекает параллельные грани призмы по прямым параллельным, а потому, проведя в плоскости грани $A_1B_1B_2A_2$ отрезок $KL \parallel ON$ и в плоскости грани $A_1F_1F_2A_2$ отрезок $KP \parallel MN$, остается еще провести отрезки OP и LM, и тогда получится шестиугольник $KLMNOP$ — сечение, контур которого замкнут и лежит на поверхности призмы. Для контроля: $PO \parallel LM$. Шестиугольник сечения имеет три пары параллельных сторон.

В зависимости от заданного расположения точек K, M и O на ребрах призмы можно получить в сечении различные фигуры, начиная с треугольника и кончая восьмиугольником.

6. Известно, что $S_{\text{сеч}} = Q \cdot \cos\alpha$, откуда $\cos\alpha = \frac{S_{\text{сеч}}}{Q}$. Площадь сечения вычисляется по формуле Герона. $S_{\text{сеч}} = 6$ кв. ед., и $\cos\alpha = \frac{S_{\text{сеч}}}{Q} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, следовательно, $\alpha = 60°$.

7. Когда построено изображение куба $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$, проводим одно сечение через концы A_1, C_1 и D_2 ребер, выходящих из вершины D_1, получим треугольник $A_1C_1D_2$, а затем второе — через концы A_2, B_1 и C_2 ребер, выходящих из вершины B_1, получим треугольник $A_2B_1C_2$ (рис. 158). Построенные плоскости сечений параллельны, так как стороны треугольников $A_1C_1D_2$ и $A_2B_1C_2$ параллельны на основании второго признака параллельности двух плоскостей.



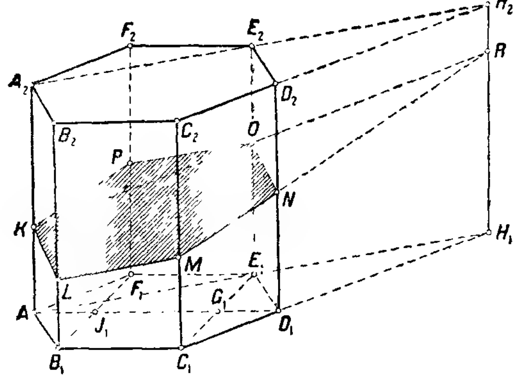


Рис. 157.

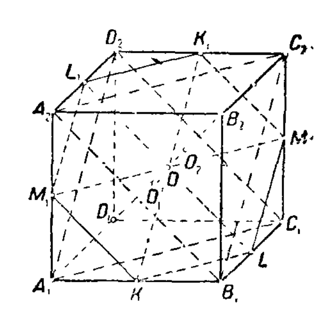


Рис. 158.

Расстояние D_1O_1 вершины D_1 до плоскости сечения $A_1C_1D_2$ можно вычислить из прямоугольного треугольника $D_1O_1D_2$, в котором гипотенуза $D_1D_2 = a$ и катет $O_1D_2 = \frac{2}{3}$ высоты равностороннего треугольника $A_1C_1D_2$, сторона которого $A_1C_1 = a\sqrt{2}$, а потому

$$O_1D_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad \text{и} \quad D_1O_1 = \sqrt{a^2 - \frac{6a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Также находим, что $B_2O_2 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Точки O_1 и O_2 находятся на одинаковом расстоянии от вершин A_1, C_1 и D_2 и от вершин A_2, B_1 и C_2 куба, а также и от вершин B_2 и D_1; наконец, и центр O куба находится на одинаковом расстоянии от вершин треугольников сечения, следовательно, все эти точки лежат на диагонали куба $B_2D_1 = a\sqrt{3}$, другими словами, перпендикуляры D_1O_1 и B_2O_2, продолженные за плоскости сечений, проходят через центр куба и составляют одну прямую; кроме того, $O_1O_2 = a\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, так что диагональ куба делится плоскостями сечения $A_1C_1D_2$ и $A_2B_1C_2$ на три равные части; плоскости сечений перпендикулярны к диагонали B_2D_1 куба.

Третье сечение, проходящее между сечениями $A_1C_1D_2$ и $A_2B_1C_2$, параллельное им и отстоящее от них на одинаковые расстояния, должно проходить через центр O куба перпендикулярно к диагонали куба. Решение этого вопроса рассмотрено выше, но можно провести его и следующим образом. Проводим через центр куба в диагональном сечении $A_1C_1C_2A_2$ прямую MM_1, параллельную диагоналям A_1C_1 и A_2C_2, и в диагональном сечении $A_1B_1C_2D_2$ прямую KK_1, параллельную диагоналям A_1D_2 и B_1C_2. Плоскость, проведенная через прямые MM_1 и KK_1 параллельна плоскостям $A_1C_1D_2$ и $A_2B_1C_2$; в этой же плоскости лежит и прямая LL_1, проведенная в диагональном сечении $B_1C_1D_2A_2$ параллельно диагоналям A_2B_1 и D_2C_1. Прямые KK_1, LL_1 и MM_1 определяют на ребрах куба 6 точек, а именно — точки K, L, M, K_1, L_1 и M_1; если соединить их в последовательном порядке, то получим искомое третье сечение — правильный шестиугольник со стороной $KL = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Этот результат совпадает с полученным ранее решением.

При решении данной задачи следует обратить внимание учащихся на то, что в данном случае более целесообразно дать изображение куба с углом сокращения $\varphi = 30°$, так как при соблюдении этого условия не совпадают направления ребер A_1D_1 и B_2C_2 с направлением диагонали D_1B_2. За исходные вершины можно было выбрать и другую пару вершин, например вершины D_2 и B_1 или еще лучше — вершины C_2 и A_1 (при $\varphi = 30°$), и тогда рисунок получился бы более рельефным. Для большей наглядности следует контуры всех трех сечений отмечать разными цветами.

Если учащиеся затрудняются четко представить себе данную фигуру, следует построить ее на геометрическом ящике и, если возможно, снять стереоскопическим фотоаппаратом; рассматривая затем снимок в спектроскоп, они ясно увидят взаимное положение плоскостей, после чего построение уже не представит затруднений.

Площадь сечения $KLMK_1L_1M_1$ равна

$$\frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot 6 = \frac{2a^2\sqrt{3}\ 6}{4\cdot 4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}\ \text{(кв. ед.)};$$

площадь сечения $A_1C_1D_2$ равна

$$\frac{(a\sqrt{2})^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4}\ \text{(кв. ед.)},$$

и, следовательно, отношение этих площадей равно

$$\frac{3a^2\sqrt{3}}{4} : \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = 3:2,$$

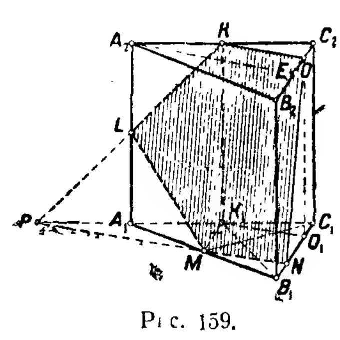


Рис. 159.

т. е. площадь сечения $KLMK_1L_1M_1$ в полтора раза больше площади сечения $A_1C_1D_2$ или площади сечения $A_2B_1C_2$.

Отношение площадей сечений может быть получено и иначе, а именно: шестиугольник сечения большими диагоналями разбивается на шесть правильных треугольников, линейные размеры которых вдвое меньше линейных размеров треугольника сечения, а следовательно, площадь каждого из них в четыре раза меньше площади треугольника сечения, площадь же шестиугольника содержит шесть таких треугольников, а потому отношение площадей равно $1:\frac{4}{6} = 6:4 = 3:2$.

Полезно предложить сравнить между собой периметры полученных сечений; периметры равны между собою, и полученные сечения являются изопериметрическими фигурами.

8. Надлежит построить призму $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ согласно заданным условиям задачи и отметить на различных ее ребрах три точки K, L и M (рис. 159). Прямые KL и LM принадлежат искомому сечению и лежат на гранях призмы.

Прямые KL и C_1A_1 при своем продолжении пересекаются в точке P, принадлежащей сечению, грани $A_1C_1C_2A_2$ и плоскости основания, а потому и прямая PM принадлежит и плоскости сечения и плоскости основания, и отрезок MN — сторона искомой фигуры сечения. Если провести KO, MN и соединить точки O и N, то получится пятиугольник сечения $KLMNO$. Полученный пятиугольник состоит 1) из равнобедренного треугольника KLM, в котором $KL = LM$, как гипотенузы равных равнобедренных прямоугольных треугольников LA_2K и LA_1M, каждый из катетов которых равен $\frac{a}{2}$, и 2) из прямоугольника $KMNO$. Что четырехугольник $KMNO$ — прямоугольник, следует доказать. Действительно, $\triangle C_1PN \backsim \triangle K_1PM$, а потому

$$\frac{C_1N}{MK_1} = \frac{CP}{K_1P} \quad \text{или} \quad \frac{C_1N}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{3a}{2}}{a}, \quad \text{откуда} \quad C_1N = \frac{3}{4}a.$$

Также находим, что $B_2O = \frac{3}{4}a$, $OC_2 = \frac{1}{4}a$ и $O_1C_1 = \frac{1}{4}a$, если провести $OO_1 \perp B_1C_1$.

Если провести $A_2E \perp B_2C_2$, имеем $EC_2 = \frac{a}{2}$, а потому $KO \parallel A_2E$ и $KO \perp B_2C_2$ и $KO = \frac{1}{2}A_2E = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Если же $KO \perp B_2C_2$ и $KO \perp OO_1$, то $KO \perp ON$ и четырехугольник $KONM$ — прямоугольник.

Вычерчиваем отдельно равнобедренный треугольник и прямоугольник (рис. 160). Высота LL_1 треугольника KLM равна половине высоты треугольника основания, т. е. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$, а сторона MK, определяемая из треугольника KK_1M, равна $\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, а следовательно, площадь треугольника KLM равна $\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2}{16}$.

Рис. 160.

Площадь прямоугольника $KMNO$ равна $MK\cdot MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2}{8}$, и, следовательно, вся площадь сечения $KLMNO$ равна $\frac{3a^2}{16} + \frac{3a^2}{8} = \frac{9a^2}{16}$ (кв. ед.).

Тот же результат можно получить другим путем.

Если спроектировать сечение на плоскость основания призмы, то проекцией сечения будет пятиугольник $A_1MNO_1K_1$; его площадь равна пл. $A_1MK_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$, сложенной с площадью $MNO_1K_1 = \frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. Итак, пл. $A_1MNO_1K_1$ равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{8} + \frac{a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

В треугольнике KMP отрезки $KL = LP = ML$, где ML — медиана; но так как $ML = \frac{1}{2}KP$, то треугольник KMP — прямоугольный, и $KM \perp MN$. Находим $\angle KMK_1$ — угол наклона плоскости сечения к плоскости основания:

$$\cos\angle KMK_1 = \frac{MK_1}{MK} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

и тогда пл. $KLMNO = \frac{\text{пл. } A_1MNO_1K_1}{\cos\angle KMK_1} = \frac{3a\sqrt{3}}{16} : \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{9a^2}{16}$ кв. ед.

Можно взять точки K, L и M и на каких-либо иных ребрах призмы, например, на ребрах B_1B_2, A_1B_1 и B_2C_2 или на ребрах C_1C_2, A_2C_2 и B_1C_1. При решении задачи можно разбить класс на три группы и предложить каждой группе решить задачу, выбрав различные три точки. Если сравнить затем четко выполненные учащимися чертежи, то можно выяснить, при каком положении точек получится наиболее простое решение.

Решение данной задачи требует знания ряда теорем из начального курса стереометрии, а потому она может быть использована для освежения в памяти пройденного. Можно до решения задачи предварительно повторить путем опроса все необходимые для решения теоремы.

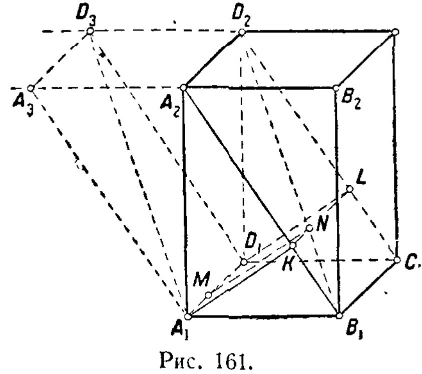


Рис. 161.

9. Требуется найти кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми B_1D_2 и A_1D_1 (рис. 161). Проводим через две пересекающиеся прямые B_1C_1 и B_1D_2 плоскость; эта плоскость параллельна ребру A_1D_1, так как $A_1D_1 \parallel B_1C_1$. Далее проводим прямую $A_1D_3 \parallel B_1D_2$ и через две пересекающиеся прямые A_1D_1 и A_1D_3 плоскость $A_1D_1D_3A_3$; эта плоскость параллельна плоскости $B_1C_1D_2A_2$. Итак, имеем две параллельные плоскости, в которых лежат рассматриваемые скрещивающиеся прямые; расстояние A_1K между ними равно расстоянию между скрещивающимися прямыми A_1D_1 и B_1D_2. A_1K — высота треугольника $A_2A_1B_1$.

Проводим затем прямую KL параллельно A_1D_1 или B_1C_1; прямая KL пересекает диагональ B_1D_2 в точке N, и, наконец, проводим $NM \parallel KA_1$, и тогда NM — также кратчайшее расстояние между A_1D_1 и B_1D.

Из прямоугольного треугольника $A_2A_1B_1$ находим:

$$B_1A_2 = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25, \quad \text{а потому} \quad A_1K = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12 \text{ см.}$$

§ 36. Конгруентность призм.

1. Определение. *Две призмы называются равными (конгруентными), если они при вложении одной в другую могут быть совмещены*, т. е. если могут совпасть все их вершины, а следовательно, и ребра, грани и углы. Вопрос о равенстве призм обычно не рассматривается в учебниках, а между тем учащиеся нередко интересуются вопросом о равенстве не только призм, но и тел вообще. Этим объясняется внесение в настоящую книгу некоторых теорем, на основании которых можно обнаружить конгруентность призм.

Рассмотрение вопроса о равенстве призм рекомендуется начать с рассмотрения конгруентности двух кубов. Учащиеся должны убедиться, что два куба конгруентны, если они имеют по равному ребру. Вложив один из кубов в другой так, чтобы основания их совпали, учащиеся убеждаются, что боковые ребра одного куба совпадают с боковыми ребрами другого, так как в одной точке плоскости можно провести к ней только один перпендикуляр; на основании же равенства ребер обоих кубов делается заключение, что и остальные четыре вершины куба совпадают; а если соответственные вершины двух кубов совпали, то и кубы совпадают и, следовательно, они конгруентны.

Те же рассуждения относятся и к двум прямоугольным параллелепипедам и к двум одноименным правильным призмам, стороны оснований и высоты которых равны.

Рассмотрение вопроса о конгруентности простейших тел имеет целью выяснить учащимся метод доказательства конгруентности тел вложением.

Прежде чем перейти к разбору признаков конгруентности призм вообще, нелишне вспомнить с учащимися определение призмы.

2. Признаки равенства, или конгруентности двух призм.

а) Первый признак равенства (конгруентности) двух призм.

***Теорема.* Две призмы конгруентны, если они имеют 1) равные основания, 2) по равному трехгранному углу при соответствующих вершинах основания, 3) по равной боковой грани заданных трехгранных углов, если грани при этом одинаково расположены.**

Дано: 1) в призмах I и II $ABCDE = A_2B_2C_2D_2E_2$;
2) трехгранный угол при вершине A равен трехгранному углу при вершине A_2;
3) грань ABB_1A_1 равна грани $A_2B_2B_3A_3$.

Требуется доказать: призма I равна призме II (рис. 162).

Рекомендуется заштриховать на рисунке данные равные грани и отметить вершины и ребра равных трехгранных углов цветными карандашами.

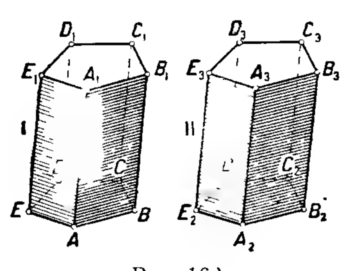


Рис. 162.

Доказательство. Вложим призму II в призму I так, чтобы равные их основания совпали.

Вследствие равенства трехгранных углов с вершинами A и A_2 грань $A_2B_2B_3A_3$ пойдет по грани ABB_1A_1 и грань $A_2E_2E_3A_3$ по грани AEE_1A_1, ребро A_2A_3 по ребру AA_1; вследствие равенства граней ребро B_2B_3 совпадет с ребром BB_1 и ребро A_3B_3 с ребром A_1B_1.

Совпадут также грани $A_2E_2E_3A_3$ и AEE_1A_1; в самом деле, ребро A_2E_2 совпало с ребром AE, ребро A_2A_3 с ребром AA_1, следовательно, совпадают также ребра E_2E_3 и EE_1, A_3E_3 и A_1E_1, ибо через одну точку можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой.

Боковые ребра D_2D_3, C_2C_3 совпадут с соответствующими ребрами DD_1 и CC_1, так как через точки D и C, с которыми соответственно совпадают точки D_2 и C_2, можно провести только по одной прямой, параллельной EE_1; этими прямыми являются DD_1 и D_2D_3, с одной стороны, и CC_1 и C_2C_3 — с другой; вершина D_3 совпадет с вершиной D_1 и вершина C_3 с вершиной C_1 в силу равенства боковых ребер. Таким образом, все вершины призмы II совпадают с соответствующими вершинами призмы I, совпадают также соответствующие ребра, а потому призмы совмещаются, и, следовательно, они конгруентны.

Следующие два признака конгруентности двух призм вытекают из первого признака:

б) Второй признак равенства (конгруентности) двух призм.

***Теорема.* Две призмы конгруентны, если 1) основания их конгруентны: $ABCDE = A_2B_2C_2D_2E_2$, 2) они имеют по равной боковой грани $ABB_1A_1 = A_2B_2B_3A_3$, 3) эти боковые грани одинаково расположены и одинаково наклонены к плоскостям основания, т. е. двугранные углы при ребрах AB и A_2B_2 равны.**

в) Третий признак равенства (конгруэнтности) двух призм.

Теорема. **Две призмы конгруентны, если 1) основания их конгруентны: $ABCDE = A_2B_2C_2D_2E$, 2) по две смежные грани их соответственно конгруентны и одинаково расположены: $ABB_1A_1 = A_2B_2B_3A_3$ и $AEE_1A_1 = A_2E_2E_3A_3$** (рис. 162).

Рассмотрим второй признак и докажем, что при условиях, указанных в теореме, трехгранные углы призм при вершинах A и A_2 конгруентны.

В самом деле, двугранные углы при ребрах AB и A_2B_2 конгруентны и заключены между равными плоскими углами EAB и $E_2A_2B_2$ и углами A_1AB и $A_3A_2B_2$; таким образом, на основании рассмотренных свойств трехгранного угла данная теорема сведена к первому признаку конгруентности призм.

На основании данных третьей теоремы также заключаем, что трехгранные углы при вершинах A и A_2 конгруентны. В самом деле,

$\angle EAB = \angle E_2A_2B_2$ как углы равных оснований,

$\left.\begin{array}{l}\angle A_1AB = \angle A_3A_2B_2\\ \angle A_1AE = \angle A_3A_2E_2\end{array}\right\}$ как углы конгруентных и одинаково расположенных граней,

а потому трехгранные углы, имеющие по три плоских, одинаково расположенных конгруентных угла, конгруентны, и теорема, таким образом, сведена к первому признаку.

§ 37. Подобие призм.

1. Подобно тому как в планиметрии рассматривают равенство, или конгруентность фигур, а затем и их подобие, так и в стереометрии можно после рассмотрения признаков равенства пространственных фигур рассмотреть и признаки их подобия. Приступая к разбору этого вопроса, лучше начать рассмотрение с учащимися двух кубов разных размеров, например, с ребром в *а см* и с ребром в *2а см*, и обратить внимание на то, что все их трехгранные углы равны, все их двугранные углы равны и боковые их грани подобны. Весьма полезно рассмотреть с учащимися, кроме кубов, еще два прямоугольных параллелепипеда, у которых измерения соответственно суть a, b, c и a_1, b_1, c_1 и относительно которых известно, что

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Надо установить, что эти параллелепипеды будут иметь: все трехгранные и двугранные углы равные и боковые грани подобные и одинаково расположенные. Нелишне показать учащимся какую-нибудь машинную деталь и уменьшенную модель ее и сравнить их между собою. После такой проработки можно дать определение, какие тела называются подобными.

Определение. *Два многогранника называются подобными, если они имеют:*

1) *одинаковое число вершин и одинаковое число граней,*

2) *соответственно равные многогранные углы* и

3) *соответственно подобные и одинаково расположенные грани.*

Отсюда вытекает, что в подобных многогранниках

4) двугранные углы соответственно равны и одинаково расположены (вследствие равенства многогранных углов) и

5) сходственные ребра пропорциональны, ибо они являются в каждых двух подобных гранях сходственными сторонами, и у каждых двух смежных граней имеется по общему ребру.

Подобные призмы.

2. Приводим три признака подобия призм соответственно трем признакам равенства призм.

а) Первый признак подобия двух призм.

***Теорема.* Две призмы подобны, если они имеют: 1) подобные основания, 2) по одному равному трехгранному углу при сходственных вершинах, 3) по одной грани этого угла, соответственно подобной и одинаково расположенной.**

Дано (в призмах I и II): 1) $ABCDE \backsim A_2B_2C_2D_2E_2$;
2) трехгранные углы при вершинах B и B_2 равны;
3) $ABB_1A_1 \backsim A_2B_2B_3A_3$ и одинаково расположены.

Требуется доказать: призма I подобна призме II (рис. 163).

Доказательство. Число вершин у обеих призм одинаковое, число граней тоже;

$$ABCDE \backsim A_2B_2C_2D_2E_2,$$

а потому

$$\frac{AB}{A_2B_2} = \frac{BC}{B_2C_2} = \ldots$$

$$ABB_1A_1 \backsim A_2B_2B_3A_3,$$

а потому

$$\frac{AB}{A_2B_2} = \frac{BB_1}{B_2B_3} = \ldots$$

Рис. 163.

Следовательно,

$$\frac{BC}{B_2C_2} = \frac{BB_1}{B_2B_3}, \quad \text{или} \quad \frac{BC}{B_2C_2} = \frac{BB_1}{B_2B_3} = \frac{B_1C_1}{B_3C_3} = \frac{CC_1}{C_2C_3}$$

вследствие равенства противолежащих сторон параллелограмов.

Трехгранный угол B равен трехгранному углу B_2, а потому

$$\angle B_1BC = \angle B_3B_2C_2,$$

и, следовательно,

$$BCB_1C_1 \backsim B_2C_2B_3C_3$$

в силу пропорциональности сторон и равенства углов параллелограмов.

Докажем теперь, что трехгранные углы при вершинах C и C_2 равны.

$\angle BCC_1 = \angle B_2C_2C_3$ как углы пополнительные для равных углов B_1BC и $B_3B_2C_2$;

$\angle BCD = \angle B_2C_2D_2$ как соответственные углы подобных оснований; *двугранные углы при ребрах BC и B_2C_2* равны, ибо равны трехгранные углы при вершинах B и B_2.

***Вывод*:** Трехгранные углы при вершинах C и C_2 равны по двугранному углу и двум их плоским углам.

Итак, на основе равенства трехгранных углов при вершинах B и B_2 и подобия граней ABB_1A_1 и $A_2B_2B_3A_3$ мы доказали равенство трехгранных углов при вершинах C и C_2 и подобие граней BCC_1B_1 и $B_2C_2C_3B_3$. Так же доказывается равенство трехгранных углов при вершинах D и D_2,

E и E_2 и т. д., а также по порядку подобие всех граней. Следовательно, призмы I и II подобны.

Следует указать учащимся, что если коэфициент подобия $k=1$, то подобные призмы при этом условии становятся конгруентными. Равенство двух призм есть частный случай подобия призм, подобно тому, как равенство двух треугольников или многоугольников есть частный случай подобия треугольников или многоугольников в планиметрии.

Следующие два признака подобия призм доказываются на основании первого признака, подобно тому как это имело место при рассмотрении вопроса о конгруентности призм.

Для большей четкости и наглядности чертежа следует ребра заданного трехгранного угла, выходящие из вершин B и B_2, выделить жирными линиями и заштриховать заданные подобные грани и подобные основания призм, чтобы при взгляде на рисунок можно было сразу видеть то, что дано.

б) Второй признак подобия двух призм.

Теорема. **Две призмы подобны, если 1) основания их подобны, 2) они имеют по одной соответственно подобной и одинаково расположенной грани, 3) подобные грани одинаково наклонены к плоскости основания.**

в) Третий признак подобия двух призм.

Теорема. **Две призмы подобны, если 1) основания их подобны, 2) две смежные боковые грани соответственно подобны и одинаково расположены.**

Доказательства последних двух случаев подобия призм проводятся аналогично доказательству, принятому при рассмотрении равенства призм при условиях, заданных вторым и третьим признаками.

§ 38. Пирамида.

1. При переходе к изучению пирамиды указывается ее образование. Предварительно дается понятие о пирамидальной поверхности, получаемой перемещением в пространстве прямой, которая одновременно скользит по некоторой плоской замкнутой ломаной, проходя через одну неподвижную точку, лежащую вне ломаной. Разъясняются понятия: образующая и направляющая; после этого указывается, что тело, называемое *пирамидой*, получается пересечением плоскостью всех граней пирамидальной поверхности. Учащимся должны быть показаны модели различных пирамид.

Дается следующее определение пирамиды: *пирамида — многогранник, одна из граней которого, основание, — многоугольник, а другие грани, боковые грани, — треугольники, имеющие основаниями стороны многоугольника и одну общую вершину вне плоскости многоугольника.*

Обращается внимание учащихся на то, что пирамида называется *правильной*, если ее основанием служит правильный многоугольник и ее вершина проектируется в центр ее основания; отмечается, что высота боковой грани правильной пирамиды называется *апофемой*, что проекцией апофемы пирамиды является апофема ее основания и что угол, образуемый этими апофемами, есть линейный угол двугранного угла, образуемого плоскостью боковой грани с плоскостью основания.

Надо напомнить учащимся, что в призмах, у которых число боковых граней больше трех, можно провести диагонали и провести диагональные сечения. В пирамидах, число боковых граней которых больше трех, также можно провести диагональные сечения: это — сечения, проходящие через вершину пирамиды и одну из диагоналей ее основания.

Следует научить учащихся проводить всевозможные сечения в четырехугольной и вообще в многоугольной пирамиде, руководствуясь указаниями о построении сечений, о которых упоминалось при построении сечений в треугольной пирамиде.

Образование усеченной пирамиды показывается на модели; плоскостью, параллельной основанию пирамиды, от нее отсекается усеченная пирамида. Дается определение: *усеченной пирамидой называется часть пирамиды, заключенная между плоскостью основания и плоскостью сечения, проведенного параллельно основанию.* Отмечается, что в усеченной пирамиде основания параллельны, и устанавливается, что основания — подобные многоугольники.

Учащимся надо также дать рисунок тела, у которого имеются две параллельные грани — одноименные, но не подобные многоугольники, чтобы уяснить, что такое тело не является усеченной пирамидой, так как боковые ребра такого тела при продолжении не пересекаются в одной точке (рис. 164). В затруднительных случаях следует сделать соответствующую модель.

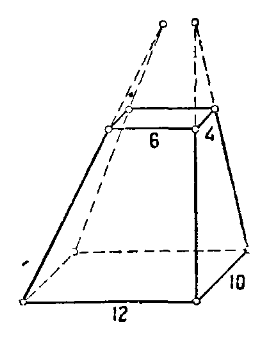


Рис. 164.

Необходимо разъяснить учащимся, что в любой правильной пирамиде все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом α и все боковые грани образуют с плоскостью основания равные двугранные углы; значит, и линейные углы β последних равны; отмечается особо, что углы α и β не равны.

Действительно, угол α — угол, образуемый ребром и его проекцией, т. е. радиусом описанной окружности, проходящей через все вершины основания, а угол β — угол, образуемый апофемой и ее проекцией, т. е. радиусом вписанной окружности, касающейся всех сторон основания; при этом для всякой пирамиды $\alpha < \beta$, так как из двух наклонных (ребро и апофема), проведенных из вершины пирамиды к плоскости ее основания, ребро больше апофемы, а потому и образует меньший угол с плоскостью основания. Можно доказать это и при помощи тригонометрии, определив $\sin\alpha$ и $\sin\beta$ из соответствующих прямоугольных треугольников и сравнив между собою полученные значения синусов.

Весьма часто учащиеся смешивают углы, принимая один угол за другой, а потому важно различие между ними четко показать на моделях, например на геометрическом ящике, и добиться решением достаточного числа задач как на построение, так и на вычисление умения различать углы, образуемые ребром, а также апофемой пирамиды с плоскостью основания.

Следует уделить внимание и вычерчиванию разверток правильной пирамиды; развертки четырехугольной пирамиды, осуществленные различными способами, даны в стабильном учебнике. Если боковую поверхность правильной n-угольной пирамиды представить себе разрезанной вдоль

одного из ребер и затем выпрямленной на плоскости, то полученная так р а з в е р т к а представляет собой, вообще говоря, многоугольник с числом сторон, равным $n+2$, причем этот многоугольник может оказаться и не выпуклым. В том случае, когда при построении развертки пирамиды две смежные стороны, являющиеся ребрами пирамиды, составляют одну прямую, развертка правильной n-угольной пирамиды — многоугольник с $n+1$ стороной. В последнем случае весьма просто определяется плоский угол при вершине: он равен $\frac{180^\circ}{n}$; так, в правильной четырехугольной пирамиде, боковая поверхность которой развертывается в виде пятиугольника, а не шестиугольника, плоский угол при вершине равен $180^\circ : 4 = 45^\circ$.

2. Особо следует обратить внимание учащихся на два вида пирамиды, — на пирамиду, боковые ребра которой образуют с плоскостью основания равные углы, и на пирамиду, боковые грани которой образуют с плоскостью основания равные двугранные углы. Это делается следующим образом.

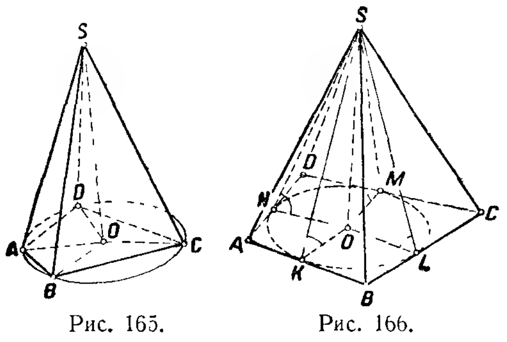


Рис. 165. Рис. 166.

1) Учащимся предлагается начертить на плоскости какой-нибудь вписанный многоугольник, например $ABCD$, и к плоскости его через центр O описанной окружности провести перпендикуляр OS (рис. 165). Если соединить затем точку S вершинами A, B, C и D многоугольника, получается пирамида, все ребра которой равны и поэтому одинаково наклонены к плоскости основания пирамиды. После такого построения учащимся понятно утверждение:

Если в какой-либо пирамиде все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы, то проекции ребер на плоскость основания также равны и вершина пирамиды проектируется в центр окружности, проходящей через все вершины основания, иначе говоря, проекции ребер равны радиусу описанной окружности.

2) Затем предлагается учащимся начертить на плоскости какой-либо описанный многоугольник, положим, четырехугольник $ABCD$, и провести к его плоскости через центр вписанной окружности перпендикуляр OS (рис. 166). Если соединить затем точку S с вершинами A, B, C и D четырехугольника, то получается пирамида $SABCD$. Проведя еще из центра O радиусы OK, OL, OM и ON и соединив точку S с точками K, L, M и N, получим равные линейные углы $\angle OKS$, $\angle OLS$, $\angle OMS$ и $\angle ONS$, определяющие наклон боковых граней к плоскости основания пирамиды. Выполнение такого построения делает для учащихся понятным утверждение:

Если в неправильной пирамиде все боковые грани образуют с плоскостью основания равные двугранные углы, то высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, имеют равные проекции — радиусы вписанной в основание окружности, — и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности.

Необходимо указать, что приведенные положения верны для правильной пирамиды, так как в правильной пирамиде и боковые ребра образуют с плоскостью основания равные между собою углы и боковые грани также образуют с плоскостью основания пирамиды равные между собою углы.

3. Для проверки, насколько усвоены учащимися приведенные предложения, могут быть предложены вопросы:

1) Три последовательные стороны основания четырехугольной пирамиды по порядку равны a, b и c; боковые грани образуют с плоскостью основания равные двугранные углы. Чему равна четвертая сторона основания?

В данном случае основание — описанный четырехугольник, а потому его четвертая сторона x находится из равенства: $a+c=b+x$, откуда $x=a-b+c$.

2) Три последовательных угла основания четырехугольной пирамиды относятся по порядку, как 2:3:4; боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы. Найти плоские углы основания.

В данном случае основание — вписанный четырехугольник; обозначив данные углы через $2x$, $3x$ и $4x$, заключаем, что искомый четвертый угол α определяется из равенства: $2x+4x=3x+\alpha$ и, следовательно,

$\alpha=2x+4x-3x=3x$; но так как сумма всех углов основания $2x+3x+4x+3x=360°$, то $x=30°$ и $2x=60°$, $3x=90°$, $4x=120°$ и $\alpha=90°$.

Такого рода вопросы, помимо расширения пространственных представлений учащихся, возвращают их к отдельным разделам планиметрии, в данном случае — к свойствам вписанных и описанных четырехугольников. Следует еще указать учащимся, что в первой задаче раздела 3 высота пирамиды есть геометрическое место точек, равно удаленных от боковых граней пирамиды, во второй — геометрическое место точек, равно удаленных от боковых ребер пирамиды. Впоследствии, при прохождении раздела о круглых телах, вопрос этот следует связать со вписанным и описанным конусом.

§ 39. Задачи на построение и вычисление, связанные с правильной треугольной пирамидой.

Вопросы, связанные с пирамидой, следует иллюстрировать рядом задач как на построение пирамид на геометрическом ящике, так, главным образом, на построение их изображений, а также и сечений пирамид. Не будем останавливаться на диагональных сечениях пирамид, — их построение не представляет затруднений, не будем также рассматривать сечения пирамиды плоскостью, параллельной плоскости основания пирамиды — эти вопросы подробно рассмотрены в стабильном учебнике. Нашей целью является подробное изучение взаимоположений элементов пирамиды и отчасти вычисление отдельных элементов пирамиды по заданным условиям задачи. Разбор задач начнем с построения правильных пирамид, а затем перейдем к неправильным пирамидам, к построению их и их сечений и к вычислению отдельных их элементов.

1) Правильная треугольная пирамида стоит на горизонтальной плоскости так, что одна сторона ее основания параллельна вертикальной

плоскости чертежа. Построить эту пирамиду по стороне a ее основания и высоте пирамиды H: $a = 16$ *см*, $H = 22$ *см*. Масштаб 1:4; угол сокращения $\varphi = 45°$; коэфициент сокращения $k = 0{,}5$.

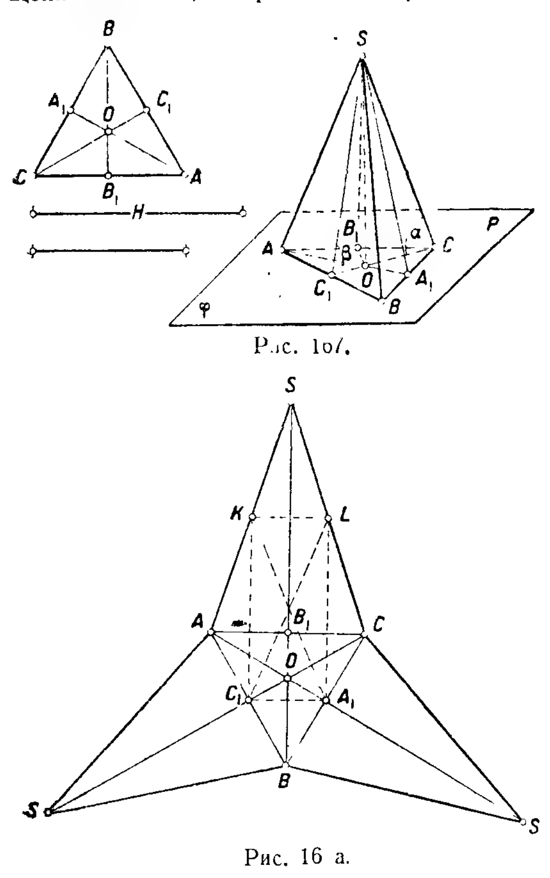


Рис. 167.

Рис. 16 а.

Прежде всего следует вычертить в данном масштабе 1:4 отрезок $a = 16$ *см*, что даст отрезок, равный 4 *см*, и отрезок $H = 22$ *см*, что соответствует отрезку, равному 5,5 *см*; затем строим равносторонний треугольник ABC со стороной, равной 4 *см*, и вычерчиваем по правилам косоугольного проектирования на плоскости P, изображаемой в виде параллелограма с углом $\varphi = 45°$, треугольник ABC (рис. 167). После этого проведем в точке O к плоскости основания перпендикуляр $OS = H$ длиной в 5,5 *см*; высота OS перпендикулярна к верхнему или нижнему краю листа или основанию параллелограма, изображающего плоскость.

Соединив точку S с вершинами основания A, B и C треугольника, получим изображение правильной треугольной пирамиды: основание ее — правильный треугольник ABC, и вершина S проектируется в центр O основания — треугольника ABC.

В связи с анализом данного построения следует отметить, что 1) O — центр вписанной в основание и описанной окружностей и $CC_1 = BB_1 = AA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $R = OC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $r = OC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; 2) боковое ребро $SA = SB = SC = l = \sqrt{H^2 + R^2} = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}$; 3) $\angle SCO = \alpha$ — угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания, причем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{SO}{OC} = \frac{H}{R} = \frac{H \cdot 3}{a\sqrt{3}} = \frac{H\sqrt{3}}{a}$; 4) $SC_1 \perp AB$ на основании теоремы о трех перпендикулярах и SC_1 — высота боковой грани, или апофема правильной пирамиды, а потому $\angle SC_1C = \beta$ — линейный угол двугранного угла при основании пирамиды, или угол наклона боковой грани к плоскости

основания; $\operatorname{tg}\beta = \frac{SO}{OC_1} = \frac{6H}{a\sqrt{3}} = \frac{2H\sqrt{3}}{a}$, откуда следует, что $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = 2$ или $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$.

Учащимся надо указать на то, что углы α и β не равны: проекция ребра SC вдвое больше проекции апофемы SC_1, а потому $SC > SC_1$ и угол $\alpha < \beta$. На рисунке углы эти следует отметить разными значками. В случае, если учащнеся встретят какие-либо затруднения, следует предложить им построить пирамиду на геометрическом ящике, а уже потом строить изображение ее.

Можно предложить учащимся вычислить площади всех четырех граней пирамиды и таким образом найти боковую и полную поверхности пирамиды.

2) Построить развертку поверхности правильной треугольной пирамиды в плоскости P, не изменяя положения плоскости ее основания.

Если повернуть боковую грань, например SAC, вокруг стороны основания AC (рис. 167а), то апофема SB_1, перпендикулярная к AC, останется перпендикулярной к AC и тогда, когда плоскость боковой грани совпадет с плоскостью основания, и потому B_1S будет продолжением высоты BB_1 основания; длина отрезка B_1S может быть вычислена и отложена в принятом масштабе на продолжении BB_1 за точку B_1. Развертка пирамиды на рис. 167а дана в плоскости чертежа в масштабе 1:4.

3) Найти кратчайший путь по поверхности треугольной пирамиды $SABC$ между серединами K и A_1 двух противолежащих ребер SA и BC пирамиды.

Если соединить на рис. 167а развертки поверхности пирамиды $SABC$ середину K ребра SA с точкой A_1 — серединой ребра BC, то отрезок KA_1 — кратчайший путь по поверхности пирамиды между точками K и A_1. Точно так же отрезок LC_1 — кратчайший путь между серединами L и C_1 ребер SC и AB. Если затем соединить между собой точки K и L, A_1 и C_1, то получим четырехугольник KLA_1C_1; это — прямоугольник, его вершины лежат на серединах сторон дельтоида $SABC$; отсюда заключаем, что KA_1 — диагональ прямоугольника, стороны которого: $KL = A_1C_1 = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}$ и $KC_1 = \frac{1}{2}SB = \frac{SB_1 + BB_1}{2} =$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right],$$ и затем вычисляем KA_1 как гипотенузу прямоугольного треугольника KC_1A_1.

Последнее вычисление следует затем проверить на геометрическом ящике; учащиеся убедятся, что кратчайший путь между точками K и A_1 по поверхности пирамиды — ломаная линия.

Следует иметь в виду, что расстояние между точками K и A_1, измеренное не по поверхности пирамиды, есть длина отрезка KA_1, проходящего „внутри" пирамиды.

Развертка боковой поверхности правильной треугольной пирамиды в плоскости боковой ее грани дана на рис. 168а. Это, вообще говоря, пятиугольник, две стороны которого — ребра пирамиды, а три другие — стороны треугольника основания.

Нужно обратить внимание на тот случай, когда боковые ребра пирамиды, служащие сторонами пятиугольника развертки, составляют

продолжение одно другого; в этом случае развертка представляет собой четырехугольник, одна сторона которого равна сумме двух боковых ребер пирамиды, а три другие — стороны треугольника основания (рис. 168б).

В последнем случае плоские углы при вершине пирамиды $SABC$ — три равных прилежащих угла: ASC, CSB и BSA, и, следовательно, каждый из них равен $\frac{180°}{3} = 60°$, т. е. все боковые грани пирамиды — правильные треугольники; правильным треугольником является и основание. Итак, все четыре грани пирамиды — равные и правильные треугольники; пирамида эта — правильный четырехгранник, или правильный тетраэдр; все ее ребра равны.

Итак, развертка боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, пятиугольник, в частном случае может быть и четырехугольником; развертка боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, шестиугольник, в частном случае — пятиугольник; в последнем случае каждый плоский угол при вершине равен $\frac{180°}{4} = 45°$. Развертка боковой

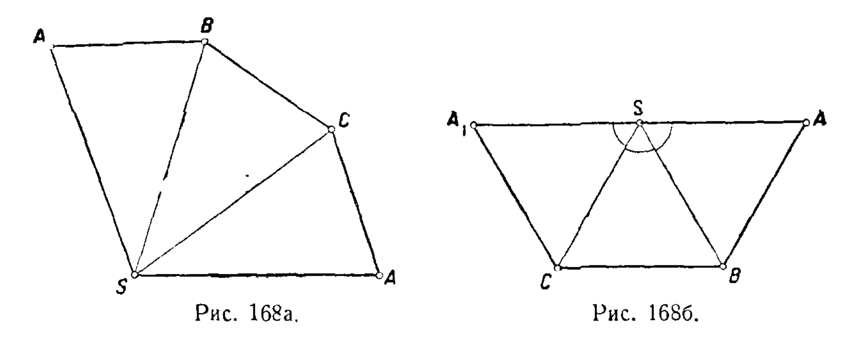


Рис. 168а. Рис. 168б.

поверхности правильной пятиугольной пирамиды, семиугольник, в частном случае — шестиугольник, но тогда каждый плоский угол при вершине пирамиды равен $\frac{180°}{5} = 36°$ и т. д.

4) Провести сечение через три точки K, L и M, данные на ребрах треугольной пирамиды.

Если даны три точки K, L и M на ребрах, выходящих из одной вершины пирамиды, то три отрезка, соединяющие данные точки (рис. 169а), образуют треугольник и непосредственно дают искомое сечение. Можно предложить учащимся продолжить до взаимного пересечения KM и AB, LM и CB, LK и CA; все три точки пересечения, как известно, должны лежать на одной прямой — прямой пересечения плоскости основания и плоскости сечения. Это служит проверкой правильности сделанного построения.

Если же данные точки K, L и M расположены так, как показано на рис. 169б, то следует сперва соединить точки K и L, и тогда отрезок KL будет одной из сторон сечения. Прямые KL и AC лежат в плоскости грани SAC, а потому точка их пересечения D также лежит в этой грани; эта точка D, находясь на прямой KL, принадлежит и плоскости сечения и плоскости грани ABC, а потому прямая DM также принадлежит и

плоскости основания и плоскости сечения; следовательно, и точка N и отрезок MN принадлежат сечению; соединив, наконец, точки N и K, получим фигуру $KLMN$ — четырехугольник сечения.

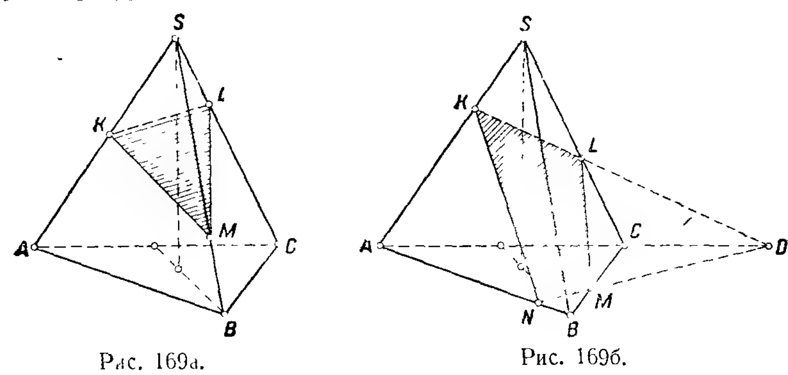


Рис. 169а. Рис. 169б.

Если окажется, что прямая KL параллельна ребру AC (рис. 169в), то четырехугольник сечения — трапеция; в самом деле, плоскость сечения параллельна прямой AC, лежащей в плоскости ABC, и пересечет последнюю по прямой $MN \parallel AC$.

Если же три точки K, L и M выбраны так, что они являются серединами ребер пирамиды, то $KLMN$ — параллелограм, так как в этом случае $KL = MN = \frac{1}{2} AC$ и $KL \parallel AC \parallel MN$.

Рис. 169в. Рис. 170.

Если, наконец, все ребра пирамиды равны и точки K, L и M — их середины, то полученное сечение — ромб и в частном случае — квадрат.

5) Провести сечение через высоту треугольной пирамиды и одну из вершин ее основания.

Высота SO пирамиды и вершина A основания (рис. 170) однозначно определяют положение плоскости сечения. Проводим прямую AA_1 через

точки A и O — вершину основания пирамиды и основание O высоты SO пирамиды, лежащее в плоскости основания пирамиды; точка A_1 принадлежит сечению, следовательно, A_1S — сторона сечения; фигура сечения — треугольник SAA_1.

Если треугольная пирамида правильная, то AA_1 — высота основания, а потому $AS \perp BC$ на основании теоремы о трех перпендикулярах, т. е. SA_1 — апофема. Отсюда вывод:

В правильной треугольной пирамиде боковое ребро, апофема противолежащей ему боковой грани и высота пирамиды лежат в одной плоскости.

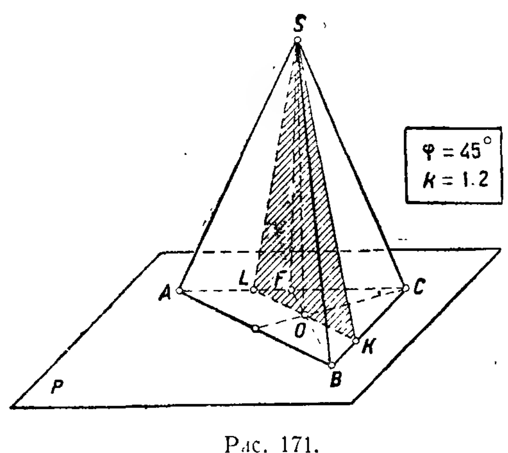


Рис. 171.

Этим весьма важным выводом следует пользоваться при решении отдельных вопросов, относящихся к правильной треугольной пирамиде. В самом деле, если соединить середину A_1 стороны основания BC с вершиной S пирамиды и вершиной основания A, то получится треугольник сечения, содержащий высоту пирамиды, угол SAA_1 — угол наклона бокового ребра к плоскости основания и угол SA_1A — линейный угол, измеряющий наклон боковой грани SBC к плоскости основания. Следует еще раз указать учащимся, что углы SAA_1 и SA_1A неравны.

6) <u>В треугольной пирамиде провести сечение, проходящее через высоту ее параллельно одной из сторон основания.</u>

По условию плоскость сечения должна проходить через основание O высоты SO (рис. 171) параллельно одной из сторон, положим, параллельно стороне AB, значит, она пересечет основание в точке O по прямой $KL \parallel AB$. Две прямые SO и KL однозначно определят положение плоскости сечения KSL, удовлетворяющего условию задачи.

7) <u>Провести в правильной треугольной пирамиде сечение, делящее пополам угол, образуемый боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.</u>

Такое сечение называется *биссекторной* плоскостью двугранного угла при основании пирамиды.

Строим линейный угол одного из двугранных углов, положим, $SBCA$ (рис. 172а), который требуется разделить пополам плоскостью сечения; соединив середину K стороны BC с вершинами A и S, получим линейный угол SKA двугранного угла $SBCA$, образованного плоскостями боковой грани и основания пирамиды. Деление пополам этого двугранного угла сводится к делению пополам его линейного угла SKA. Допустим, что KD — биссектриса линейного угла SKA, тогда $\frac{DS}{DA} = \frac{KS}{KA}$. Чтобы найти точку D, следует ребро SA разделить на два отрезка в отношении $KS : KA$,

считая от вершины S. Если сторона основания и высота пирамиды равны a и H, то $KS=\sqrt{H^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}$ и $KA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; точка же D найдется, если разделить отрезок SA в отношении $\sqrt{H^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}:\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Когда точка D найдена, то, соединив ее с вершинами B и C основания, получаем искомое сечение BCD.

Приведенное построение требует предварительного вычисления отрезков KA и KS, длина которых не дана, а потому оно сложно; приводим более простое построение.

Строим правильную треугольную пирамиду так, чтобы высота ее основания AF была параллельна вертикальной плоскости чертежа (рис. 172б); при таком построении плоскость треугольника SAF параллельна вертикальной плоскости чертежа и стороны его даны с соблюдением масштаба

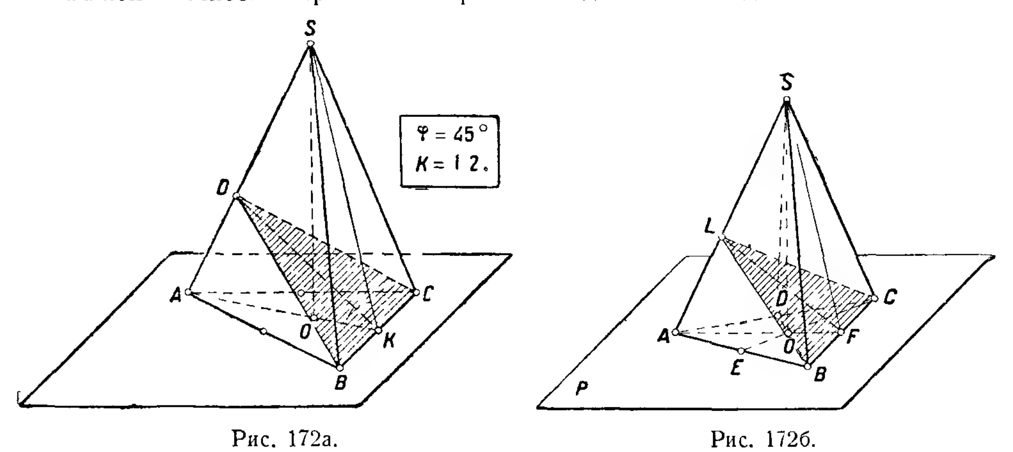


Рис. 172а. Рис. 172б.

в натуральную их величину, а потому можно обычным приемом, применяемым в планиметрии, разделить угол SFA пополам, найти точку L и получить биссекторную плоскость BCL.

Такое построение не требует каких-либо дополнительных вычислений и построений.

Следует заметить, что такое расположение рисунка надо предпочесть другим, так как при указанных условиях даются в действительную величину с соблюдением принятого масштаба: SO — высота пирамиды, SA — боковое ребро пирамиды, SF — апофема пирамиды, AF — высота основания, сечение SAF, элементами которого являются последние три отрезка, и, наконец, угол SAF — угол наклона ребра пирамиды к плоскости основания.

8) Провести в правильной треугольной пирамиде сечение, проходящее через сторону основания перпендикулярно к противолежащему ребру.

Построив сечение SAF (рис. 173), лежащее в плоскости чертежа и проходящее через ребро и высоту пирамиды, проводим $FL \perp SA$ обычными приемами планиметрии и соединяем точку L с вершинами B и C; тогда BLC — искомое сечение, однозначно определяемое прямыми BC и FL. Сечение это перпендикулярно к ребру SA, так как $SL \perp LF$ по

построению, SL ортогонально к BC, ибо прямая BC перпендикулярна к плоскости SFA, а, следовательно, она ортогональна к SA, т. е. к SL (можно сделать заключение и на основании теоремы о трех перпендикулярах в широком ее толковании).

Надо обратить внимание учащихся на то, что длина отрезка FL — кратчайшее расстояние между непересекающимися ребрами. Построение значительно упрощается в том случае, когда все ребра треугольной пирамиды равны, т. е. когда дан правильный четырехгранник, или правильный тетраэдр. В этом случае треугольник SFA — равнобедренный, так как $SF = AF$ как высоты равных равносторонних треугольников, и FL является и высотой, и медианой, и биссектрисой, т. е. точка L — середина ребра SA; поэтому, разделив ребро SA пополам и соединив середину его L с вершинами B и C, получим искомое сечение.

Сечение LBC является в правильном четырехграннике в то же время и биссекторной плоскостью двугранного угла, образованного плоскостью боковой грани SBC и плоскостью основания ABC пирамиды.

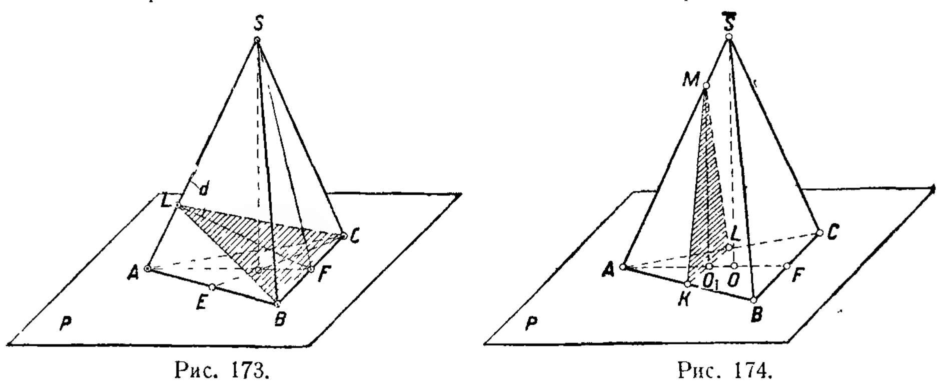


Рис. 173. Рис. 174.

9) Построить линейный угол двугранного угла, образованного двумя боковыми гранями правильной треугольной пирамиды.

Построение это аналогично тому, которое дано в предыдущей задаче; согласно определению линейного угла, угол BLC — искомый, так как плоскость треугольника BLC перпендикулярна к ребру SA, следовательно, $LC \perp SA$ и $LB \perp SA$.

10) Через точку M, взятую на боковом ребре SA правильной треугольной пирамиды, провести сечение, перпендикулярное к высоте AF основания ABC.

Пусть пирамида $SABC$ построена так, что высота AF основания ABC параллельна вертикальной плоскости чертежа (рис. 174).

Строим плоскость сечения перпендикулярно к плоскости основания, для чего нужно, чтобы плоскость сечения проходила через перпендикуляр к плоскости основания ABC: проводим $MO_1 \perp ABC$, или, что то же самое, $MO_1 \parallel SO$; всякая плоскость, проходящая через перпендикуляр MO_1, перпендикулярна к плоскости основания ABC, и в числе этих плоскостей будет и плоскость ASF. Чтобы плоскость сечения была перпендикулярна к высоте AF основания ABC, высота AF должна быть перпендикулярна к двум прямым на плоскости сечения; к прямой MO_1

высота AF перпендикулярна; если высота AF будет, кроме того, перпендикулярна к прямой, по которой искомое сечение пересечет плоскость основания, то задача решена. Итак, если провести через основание O_1 перпендикуляра MO_1 прямую $KL \perp AF$ или $KL \parallel BC$, а затем — плоскость через MO_1 и KL, то эта плоскость — искомое сечение: прямые MO_1 и KL определяют сечение однозначно; это сечение перпендикулярно к плоскости основания и к высоте AF; $\angle MO_1F = d$ и $\angle LO_1F = d$.

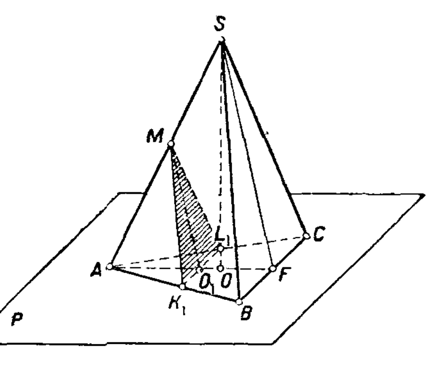


Рис. 175.

11) Через точку M на ребре SA правильной треугольной пирамиды провести плоскость, параллельную плоскости, противолежащей ребру SA боковой грани BSC.

Построение такое же, как и в предыдущей задаче, с той лишь разницей, что через точку M в плоскости SAF (рис. 175) следует провести прямую $MO_1 \parallel SF$ — апофеме пирамиды, и через точку O_1 — прямую $K_1L_1 \parallel BC$. Сечение MK_1L_1 прямыми MO_1 и K_1L_1 определяется однозначно. $K_1L_1 \perp AO$, а потому $K_1L_1 \perp MO_1$, и $\angle MO_1A$ — линейный угол двугранного угла, образуемого плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды; плоскость K_1L_1M параллельна плоскости SBC на основании второго признака параллельности двух плоскостей.

12) Провести в правильной треугольной пирамиде сечение, проходящее через центр основания параллельно боковой грани.

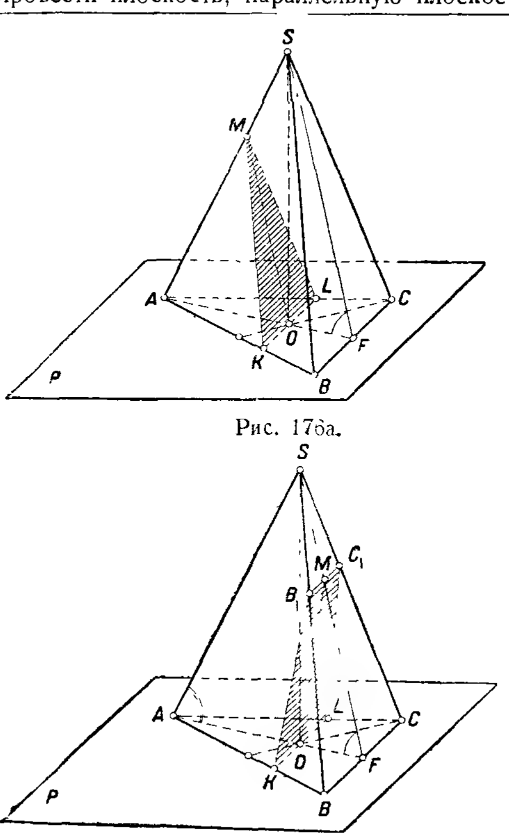


Рис. 176а.

Рис. 176б.

Проводим сперва сечение SAF (рис. 176а), а затем — в плоскости SAF через точку O прямую $OM \parallel SF$ и в плоскости ABC прямую $KL \parallel BC$; тогда $\triangle KLM$ — искомое сечение.

Линейные углы SFA и MOA равны, значит, равны и соответствен-

ные их двугранные углы, а потому плоскость KLM параллельна плоскости SBC.

Если вращать плоскость сечения KLM вокруг KL по направлению движения часовой стрелки, то угол MOA будет увеличиваться, а угол MOF — уменьшаться; когда угол MOA окажется равным 90°, точка M совпадет с вершиной S пирамиды, и сечение KLS будет перпендикулярно к плоскости ABC; при этом OM вращается в плоскости ASF. Если продолжать увеличивать угол MOA или уменьшать угол MOF, то точка M будет перемещаться по прямой SF и плоскость сечения KLM, имея с плоскостью боковой грани пирамиды общую точку M, будет иметь с ней и общую прямую, проходящую через точку M, — прямую B_1C_1 (рис. 176б), параллельную BC. Если вращать плоскость KLC_1B_1 до тех пор, пока угол MOF не окажется равным углу SAF, то плоскость сечения окажется наклоненной к плоскости основания под тем же углом, как и ребро SA, и будет параллельна ребру SA (см. следующую задачу). При дальнейшем вращении угол MOF будет уменьшаться, и когда OM совпадет с OF, плоскость сечения сольется с плоскостью основания.

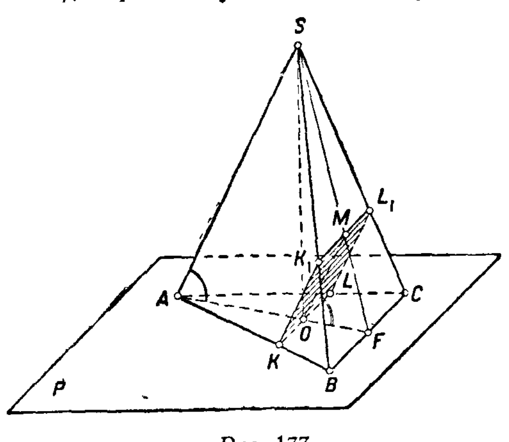


Рис. 177.

На последних двух рисунках плоскость сечения не совпадает с плоскостью чертежа, не параллельна ей, хотя это было бы и более четко. Учащиеся сами могут дать такие рисунки. Заметим только, что при этом лучше давать несколько промежуточных положений и прямую MO отметить каким-либо цветом.

13) Через центр основания правильной треугольной пирамиды провести сечение, параллельное двум непересекающимся ребрам пирамиды SA и BC.

Искомая плоскость проходит через центр O основания и параллельна ребру BC (рис. 177); кроме того, она параллельна ребру AS, следовательно, она проходит через прямую $OM \parallel AS$, лежащую в плоскости ASF; поэтому, если провести прямую $K_1L_1 \parallel BC$ и соединить между собою точки K, L, K_1 и L_1, то получим искомое сечение — четырехугольник KLK_1L_1. Но $K_1L_1 \underline{\parallel} KL$, а потому четырехугольник KLL_1K_1 — параллелограм; но SA ортогональна к BC, т. е. $SA \perp BC$, а потому KLL_1K_1 — прямоугольник.

14) Через среднюю линию KL основания правильной треугольной пирамиды провести плоскость, параллельную боковому ребру.

Построение аналогично построению предыдущей задачи (рис. 178). В сечении получается параллелограм, ибо $NM = \frac{1}{2} BC = KL$ и $NM \parallel KL$, но SA ортогонально к BC, т. е. $SA \perp BC$, а потому $KLMN$ — прямоугольный параллелограм, т. е. прямоугольник. Если все ребра пирамиды

равны, то сечение дает квадрат, так как $KL = LM = MN = NK$, как средние линии равных равносторонних треугольников.

15) В треугольной пирамиде $SABC$ на ее ребрах SA, SB и SC взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1 и через них проведено сечение. Доказать, что точки пересечения K, L и M соответственных сторон треугольников сечения и основания пирамиды лежат на одной прямой.

Доказательство этого предложения дано выше.

Следует предложить учащимся показать, что теорема справедлива и для треугольников A_1AK и C_1L (рис. 179), так как прямые A_1C_1, AC и KL, проходящие через соответственные вершины треугольников, пересекаются в одной точке M. Стороны этих треугольников пересекаются в точках S, B и B_1, лежащих на ребре пирамиды SB. То же самое имеет место для треугольников C_1CM и B_1BK, стороны которых пересекаются в точках S, A и A_1, лежащих на ребре SA, а также для треугольников

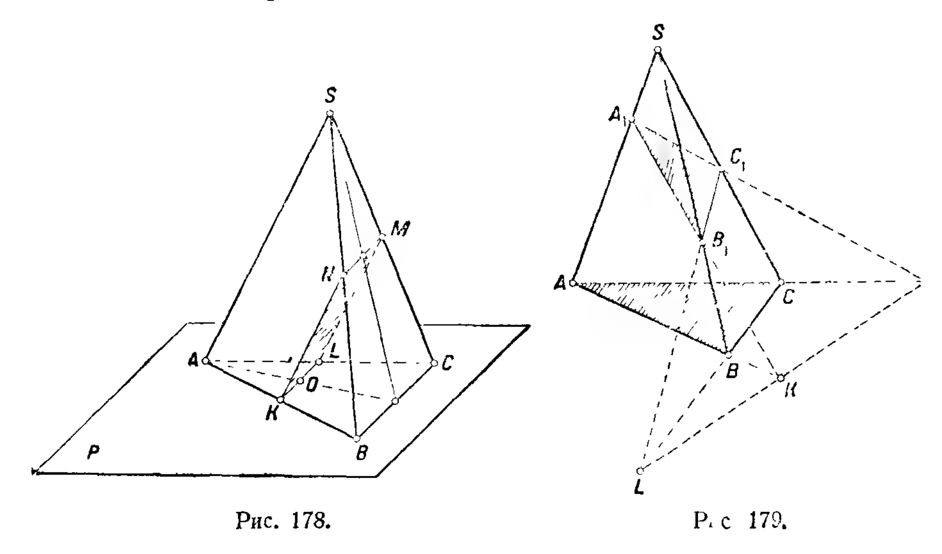


Рис. 178. Рис. 179.

AA_1M и BB_1L, стороны которых пересекаются в точках S, C и C_1, лежащих на ребре SC.

Повторный разбор известной теоремы на треугольной пирамиде более доступен учащимся; одновременно это дает им возможность построить линию пересечения LM плоскостей двух треугольников: сечения и основания. Кроме того, она является подготовкой к следующей задаче на построение.

16) На трех гранях треугольной пирамиды даны точки K, L и M. Провести через эти точки плоскость, пересекающую пирамиду.

Особо следует выделить точки K, L и M, однозначно определяющие искомое сечение, затем следует провести на гранях треугольной пирамиды $SABC$ из вершины ее S (рис. 180) через данные точки K, L и M прямые, которые пересекут стороны основания ABC в точках K_1, L_1 и M_1; соединив последние прямыми, получаем треугольную пирамиду $SK_1L_1M_1$ и сечение ее плоскостью, проходящей через точки K, L и M; это сечение — треугольник KLM.

Прямые KL и K_1L_1, LM и L_1M_1, MK и M_1K_1 пересекаются в точках 1, 2 и 3, лежащих на одной прямой — линии пересечения плоскости основания с плоскостью сечения. Сторона основания BA пересекает эту линию сечения в точке 4, принадлежащей и плоскости сечения и плоскости передней грани SAB. На передней грани дана точка K, а потому

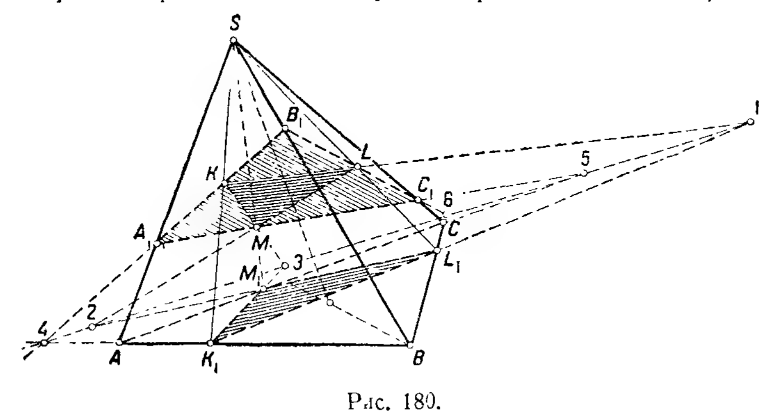


Рис. 180.

прямая, проходящая через точки 4 и K, также принадлежит обеим плоскостям — и плоскости сечения и плоскости передней грани, и A_1B_1 — прямая, по которой плоскость сечения пересекается с плоскостью грани SAB.

Дальнейшее построение не представляет затруднений. Так, точки B_1 и L принадлежат и плоскости сечения и плоскости грани SBC, а потому прямая, проходящая через точки B_1 и C_1, принадлежит обеим плоскостям, и B_1C_1 — линия пересечения плоскостей грани SBC и искомого сечения. Так же находим и третью сторону A_1C_1 сечения. Искомое сечение проходит через данные на гранях пирамиды точки K, L и M.

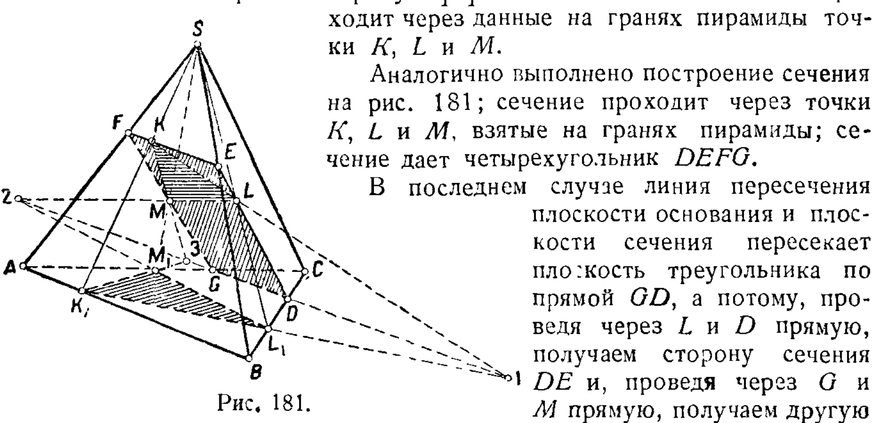


Рис. 181.

Аналогично выполнено построение сечения на рис. 181; сечение проходит через точки K, L и M, взятые на гранях пирамиды; сечение дает четырехугольник $DEFG$.

В последнем случае линия пересечения плоскости основания и плоскости сечения пересекает плоскость треугольника по прямой GD, а потому, проведя через L и D прямую, получаем сторону сечения DE и, проведя через G и M прямую, получаем другую сторону сечения FG, после чего остается только соединить точки F и E, и тогда искомое сечение $DEFG$ найдено.

В обоих случаях можно провести построение сечений, не зная теоремы, которой мы пользовались; однако теорема позволяет ускорить построение, проверить правильность построения и дает четкое представ-

ление о линии пересечения плоскости основания пирамиды и плоскости сечения, если даже эта линия получается вне данного тела, как на рис. 179.

Приведенные задачи вскрывают всевозможные приемы построения линий, углов, сечений в треугольной пирамиде. Этими же приемами решаются задачи на построение в четырехугольной, пятиугольной и т. д. пирамидах. Подобного рода задачи рассматриваются и решаются в классе и даются учащимся для самостоятельной проработки на дому. При выполнении учащимися построения следует от них всегда требовать:

1) вычерчивания плоскости, на которую поставлен многогранник, с соблюдением угла сокращения $\varphi = 45^\circ$, а в отдельных случаях и $\varphi = 30^\circ$;

2) установления коэфициента сокращения соответственно 1:2 или 2:3;

3) установления линейного масштаба, в котором вычерчивается фигура.

Указание о сем должно отмечаться на рисунках. Так, следует около рисунка писать:

$$\varphi = 45^\circ,\ k = 1:2,\ \text{масштаб}\ 1:50.$$

При вычерчивании правильной треугольной пирамиды лучше всего рисунок расположить так, чтобы сечение, проходящее через высоту основания и высоту пирамиды, было параллельно вертикальной плоскости чертежа, особенно в тех случаях, когда требуется провести плоскость параллельно ребру или плоскости боковой грани.

При построении в правильной четырехугольной пирамиде сечения, параллельного ребру пирамиды, следует расположить диагональное сечение параллельно вертикальной плоскости чертежа, если же требуется провести сечение параллельно или перпендикулярно к одной из боковых граней пирамиды, то лучше всего расположить пирамиду так, чтобы данная боковая грань была расположена перпендикулярно к вертикальной плоскости чертежа.

17) Вычислить длину ребер правильной четырехугольной пирамиды, если известно, что сечение, проведенное в пирамиде через диагональ основания перпендикулярно к боковому ребру пирамиды, есть треугольник со сторонами a и b.

В данном случае учащиеся должны построить пирамиду по треугольнику сечения, стороны которого равны a и b, при условии, что плоскость этого треугольника перпендикулярна к боковому ребру пирамиды.

Задачам на построение в стереометрии также следует предпослать анализ, как это было указано при решении задач на построение в планиметрии.

Допустим, что задача решена, пирамида построена и в ней проведено сечение, указанное в задаче (рис. 182а). Треугольник BED сечения — равнобедренный, его основание BD — диагональ квадрата, служащего основанием пирамиды. Треугольник OEC — прямоугольный: по условию $\angle OEC = 90^\circ$, следовательно, его вершина E лежит на окружности диаметра OC.

Необходимо удобно расположить чертеж. Ясно, что в том случае, если диагональное сечение SAC пирамиды параллельно вертикальной плоскости чертежа, то высота OE треугольника BED будет соответ-

ствовать действительной ее величине Итак, задача сводится к построению квадрата по его диагоналям, равным стороне основания треугольника сечения. Нужно еще решить, которая из данных сторон — a или b — является основанием сечения. Когда имеются определенные числовые данные, то вопрос этот решается на основании зависимости между сторонами треугольника; так, если даны стороны 3 и 6, то ясно, что основанием может быть только сторона, равная 3; если же даны стороны 4 и 6, то основанием может быть сторона, равная или 4 или 6, и тогда задача допускает два решения.

Пусть дан треугольник сечения BDE и $BD = a$ — его основание (рис. 182б). Строим основание пирамиды — квадрат, учитывая, что $\varphi = 45^\circ$ и $k = 0{,}5$; проводим для этого на плоскости P отрезок $AC = a$ и отрезок BD под углом $\varphi = 45^\circ$ к нему, при этом $BD = \frac{1}{2} AC$. Затем строим на отрезке OC как на диаметре полуокружность и из точки O засекаем радиусом, равным OE, окружность в точке E; через точки C и E проводим прямую CS до пересечения в точке S с направлением высоты пирамиды; OS — высота пирамиды и S — вершина пирамиды; все пять вершин пирамиды построены, тем самым построена и сама пирамида.

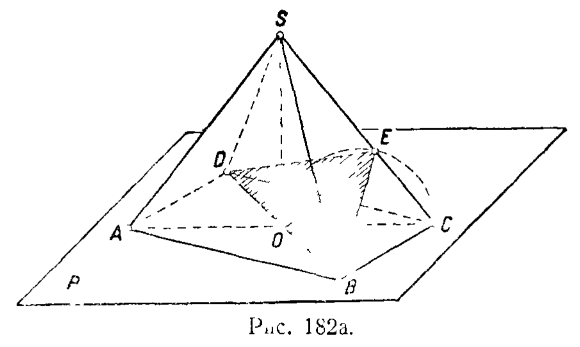


Рис. 182а.

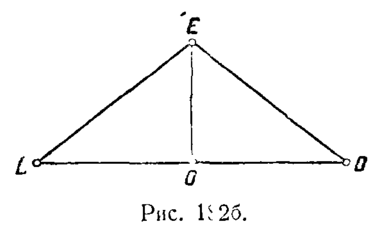


Рис. 182б.

Вычисления выполняются в таком порядке:

AB	$AB \cdot \sqrt{2} = a$ и $AB = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,
EO	$EO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$,
EC	$EC = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - 4b^2}$,
SC	$SC : OC = OC : EC$,

откуда

$$SC = \frac{a^2}{4} : \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - 4b^2} = \frac{a^2}{2\sqrt{2a^2 - 4b^2}}.$$

Если бы в условии задачи было указано, что сечение параллельно боковому ребру AS, то $OE = \frac{1}{2} AS$; тогда боковое ребро пирамиды было бы известно, и задача сводилась бы к построению прямоугольного треугольника AOS по катету $AO = \frac{a}{2}$ и гипотенузе $SA = 2h$, т. е. удвоенной длине высоты OE сечения BED.

Задача приведенного типа полезна тем, что требует по данному сечению тела или по другим данным элементам тела построить самое тело.

Задачи и вопросы.

1. Построить изображение правильной треугольной пирамиды по стороне a основания, углу α наклона бокового ребра к плоскости основания или углу β наклона боковой грани к плоскости основания ($\varphi = 45°$ и $k = 0{,}5$).

2. Построить изображение правильной треугольной пирамиды:

1) по стороне основания и апофеме боковой грани;

2) по стороне основания и высоте пирамиды;

3) по стороне основания и ребру;

4) по стороне основания и кратчайшему расстоянию между двумя скрещивающимися ребрами пирамиды;

5) по апофеме и высоте;

6) по боковому ребру и высоте пирамиды;

7) по радиусу вписанной в основание (или описанной) окружности и высоте.

3. Построить изображение правильной треугольной пирамиды:

1) по стороне основания и плоскому углу при вершине пирамиды;

2) по стороне основания и углу между ребром и противолежащей боковой гранью;

3) по стороне основания и двугранному углу между двумя смежными боковыми гранями.

4. Построить правильную четырехугольную пирамиду:

1) по стороне основания и наклону бокового ребра (боковой грани) к плоскости основания;

2) по стороне основания и двугранному углу при основании

3) по стороне основания и двугранному углу между двумя смежными боковыми гранями;

4) по стороне основания и углу между двумя противолежащими боковыми гранями;

5) по данному диагональному сечению.

5. Построить треугольную пирамиду по сторонам ее основания a, b и c, углу α наклона каждой боковой грани к плоскости основания и высоте.

6. Построить правильную шестиугольную пирамиду по данному наибольшему диагональному сечению.

7. Каждое ребро тетраэдра равно a. Найти расстояние между центрами его граней.

8. В каком отношении делят друг друга высоты правильного тетраэдра?

9. Построить изображение пирамиды, если известно, что основание ее — ромб, высота которого равна h и боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания угол α. Вычислить высоту H пирамиды ($h = 2$; $\alpha = 45°$).

10. В правильной четырехугольной пирамиде двугранные углы при боковых ребрах равны α, сторона основания равна a. Вычислить высоту пирамиды ($\alpha = 120°$, $a = 2$).

11. Площадь основания пирамиды равна Q *м*^{2}; высота разделена на n равных частей, и через точки деления проведены плоскости параллельно плоскости основания. Найти площади сечений ($Q = 12$ *м*^{2}, $n = 10$).

12. В правильной четырехугольной пирамиде даны: сторона основания a и угол α наклона бокового ребра к плоскости основания. Построить пирамиду и провести в ней сечение через вершину основания перпендикулярно к противолежащему ребру.

Вычислить площадь сечения ($\alpha = 60°$, $a = 10$).

13. Построить правильную шестиугольную пирамиду по стороне основания a и двугранному углу при основании α. Провести сечение через сторону основания перпендикулярно к противолежащей грани и найти площадь сечения ($a = 10$, $\alpha = 60°$).

14. Построить треугольную пирамиду по данным ее шести ребрам: a, b и c — стороны основания и b_1, b_2 и b_3 — боковые ребра.

15. Пересечь треугольную пирамиду плоскостью, проходящей через данную на боковом ребре точку так, чтобы боковые ребра были наклонены к этой плоскости под одним и тем же углом,

16. Построить изображение правильной треугольной усеченной пирамиды по данным сторонам a и b ее оснований ($a > b$) и острому углу $\alpha = 60°$ наклона боковой грани к плоскости основания.

17. В правильной четырехугольной пирамиде провести сечение, проходящее

через середины двух смежных сторон основания и середину высоты пирамиды. Какая фигура получится в сечении?

Вычислить площадь полученного сечения, если известно, что высота пирамиды относится к диагонали основания, как $m:n-1:2$, а сторона основания $a=4{,}0$ *см*. Найти также угол наклона ребра к плоскости основания.

18. Построить изображение правильной четырехугольной усеченной пирамиды по сторонам ее оснований a и b ($a>b$) и высоте h. Через центр меньшего основания провести сечение, параллельное плоскости боковой грани.

19. Основание пирамиды — треугольник со сторонами c и b и углом γ между ними. Боковое ребро a, проходящее через вершину угла γ, перпендикулярно к плоскости основания. Построить развертку поверхности пирамиды.

20. Построить изображение правильной усеченной шестиугольной пирамиды, если известно, что стороны ее оснований — a и b ($a>b$) и двугранные острые углы при основании — α ($\varphi=45^\circ$, $k=0{,}5$).

Построить сечение, проходящее через одну сторону a основания и противолежащую сторону b другого основания, и вычислить площадь полученного сечения ($a=4$ *дм*, $b=2$ *дм* и $\alpha=60^\circ$).

Указания к задачам и вопросам.

1. Сперва надлежит построить равносторонний треугольник ABC со стороною a и высоту его AM (рис. 183а), а затем — изображение этого треугольника на плоскости P так, чтобы высота его AM была параллельна вертикальной плоскости чертежа (рис. 183б). Если провести медиану основания BN, то тем

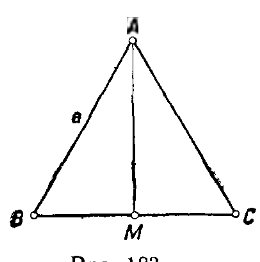
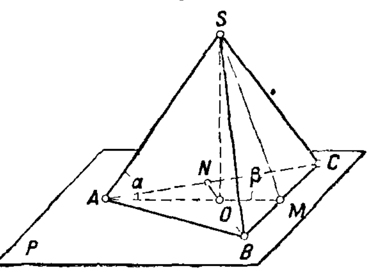


Рис. 183а.



Ри . 183 .

самым определится центр O основания, так как медианы, они же высоты в равностороннем треугольнике, пересекаются в одной точке, в которую и проектируется вершина правильной треугольной пирамиды. После этого нужно построить перпендикуляр OS к плоскости основания, т. е. перпендикулярно к AM. В плоскости, определяемой прямыми AM и OS, следует на прямой AM построить при точке A угол, равный действительной величине данного угла α, так как плоскость SAO параллельна вертикальной плоскости чертежа. Точка пересечения прямой AS и высоты OS определит вершину S пирамиды, а следовательно,— и всю пирамиду.

Так же строится изображение правильной пирамиды по стороне основания и углу β наклона боковой грани к плоскости основания; этот угол строится при точке M высоты AM в плоскости SAO.

В правильной треугольной пирамиде, как известно, $\mathrm{tg}\beta=2\mathrm{tg}\alpha$, поэтому по данному одному из углов, α или β, можно вычислить другой угол.

Построение правильной шестиугольной пирамиды по тем же данным—или по стороне основания и высоте пирамиды, или по боковому ребру и высоте пирамиды—не представляет особых затруднений, если приведенное выше построение усвоено.

2. Построение изображений пирамиды по данным задачи выполняется весьма просто, если поставить пирамиду на горизонтальной плоскости так, чтобы сечение ее, проходящее через ребро и высоту пирамиды, было параллельно вертикальной плоскости чертежа (рис. 184).

1) Сперва строится основание ABC и его высота AD. Затем строится треугольник ABC на горизонтальной плоскости P так, чтобы высота AD была па

раллельна вертикальной плоскости чертежа; высота AD делится на три равные части, $OD=\frac{1}{2}AO$, и проводится высота OS. Задача в основном приводится к построению прямоугольного треугольника SOD по катету OD и гипотенузе DS. Определением положения вершины S определяется пирамида $SABC$.

В дальнейшем не будем особо упоминать о сечении ADS, в котором все элементы даются неискаженными, если, конечно, эта плоскость сечения параллельна вертикальной плоскости чертежа.

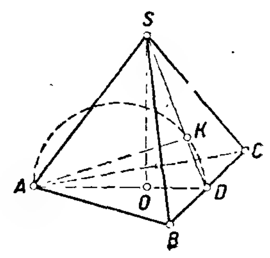


Рис. 184.

2) Построение сводится к построению прямоугольного треугольника по катетам OS и OD (рис. 184).

3) Построение аналогично предыдущим.

4) Построив основание AD сечения, проводим на нем как на диаметре полуокружность, и строим прямоугольный треугольник по гипотенузе AD и катету AK. Пересечение высоты OS и прямой DK дает искомую вершину S пирамиды, а следовательно, и пирамиду в целом.

5) Построив прямоугольный треугольник SOD по SO и SD, продолжаем DO на расстояние $OA=2OD$, ибо $OD=\frac{1}{3}AD$, и тогда получим сечение ADS.

Строим затем правильный треугольник по его высоте (задача планиметрии, $\varphi=45^\circ$) и, проведя BC под углом в 45° к AD, откладываем по обе стороны от D по отрезку $BD=DC=\frac{1}{4}$ стороны правильного треугольника, так как $k=\frac{1}{2}$; соединив, наконец, точки C и B с точкой S, получаем искомую пирамиду.

6) Построение выполняется, как и построение, указанное в предыдущей задаче, с той лишь разницей, что в данном случае надлежит построить сперва прямоугольный треугольник SOA и продолжить AO на расстояние $OD=\frac{1}{2}AO$ и т. д.

7) Построение аналогично построению задачи 5 или 6; данные $OD=r$ или $OA=R$.

Для большей наглядности и четкости чертежа целесообразно заданные отрезки отмечать цветными линиями, а также заштриховать основную фигуру, которую строят.

3. 1) Боковая грань правильной треугольной пирамиды — равнобедренный треугольник; даны его основание BC и угол BSC при вершине. Построив средствами планиметрии такой треугольник, найдем его высоту SD — апофему пирамиды, и, таким образом, вопрос сводится ко второму заданию предыдущей задачи.

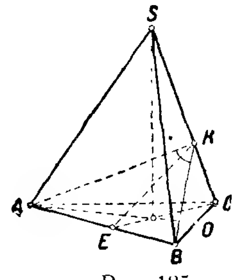


Рис. 185.

2) Данный угол ASD между ребром SA и плоскостью грани BSC равен углу SAD наклона бокового ребра к плоскости основания, и, тем самым, построение сводится к задаче 1.

3) Пусть задача решена и пирамида построена, построен также линейный угол AKB; из рис. 185 усматриваем, что EK — кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися ребрами; это расстояние можно найти, построив равнобедренный треугольник AKB по данному основанию AB и углу AKB при вершине K. В остальном построение сводится к построению, указанному в задаче 2 (вопрос 4).

4. 1) Так как дан угол наклона бокового ребра к плоскости основания, то целесообразно вычертить изображение правильной четырехугольной пирамиды так, чтобы плоскость ее диагонального сечения была параллельна вертикальной плоскости чертежа.

Порядок построения следующий: строится квадрат с данной стороной (рис 186а); изображение квадрата на горизонтальной плоскости при параллельности его диагонали вертикальной плоскости чертежа (рис. 186б); направление высоты; угол в конце диагонали в плоскости диагонального сечения (рис. 186б).

2) Для данного случая полезно построить изображение пирамиды так, чтобы

плоскость, проходящая через апофемы двух противолежащих граней, была параллельна вертикальной плоскости чертежа (рис. 187).

3) Порядок построения следующий: строится квадрат по его стороне средствами планиметрии; равнобедренный треугольник BKD по его основанию BD и углу при вершине K средствами планиметрии; квадрат, лежащий в горизонтальной плоскости, с диагональю AC, параллельной нижнему или верхнему краю листа или доски (рис. 188); полуокружность на диаметре OC и прямоугольный треугольник с гипотенузой OC и катетом OK, данным в условиях задачи (п. б);

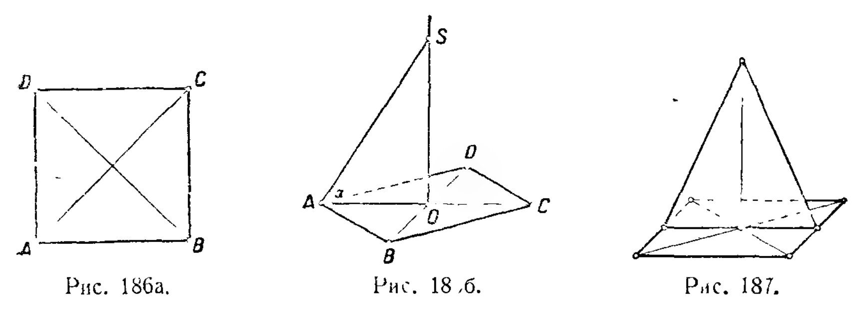


Рис. 186а. Рис. 186б. Рис. 187.

пересечение прямой CK с перпендикуляром OS к плоскости основания, что дает вершину S и, следовательно, всю пирамиду.

4) Сечение, проходящее через апофемы противолежащих граней, — равнобедренный треугольник; основание его — сторона основания пирамиды, а угол при вершине данный угол; углы при основании являются линейными углами двугранных углов при основании и тоже известны. Построение сводится к построению, приведенному в задаче 2 (вопрос 4).

5) Известны: диагональ основания, ребра пирамиды и углы наклона ребер к плоскости основания. Построение сводится к построению одной из предыдущих задач.

5. Порядок построения следующий: строится треугольник по трем сторонам и вписанная в него окружность (рис. 189) средствами планиметрии; треугольник ABC в плоскости P так, чтобы высота AD была параллельна нижнему краю рисунка (рис. 190), прямая $BC = a$ под углом 45°, так как $\varphi = 45°$, к высоте AD

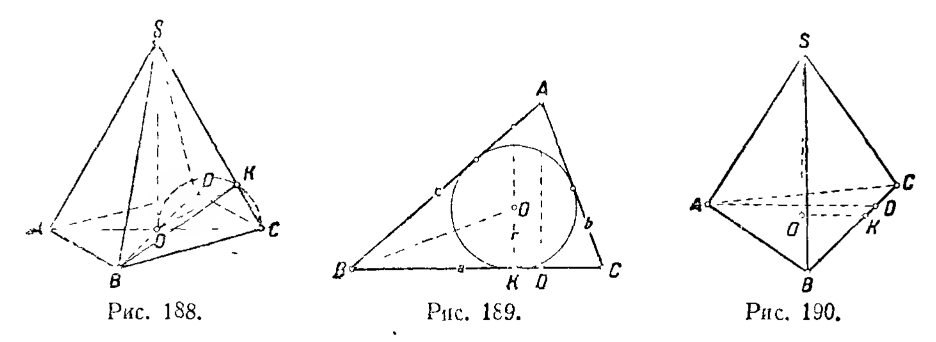


Рис. 188. Рис. 189. Рис. 190.

Отметив на стороне BC от точки K отрезок KD, проводим $KO \parallel DA$ и откладываем $KO = r$. Если провести затем высоту OS, то получим искомую пирамиду.

6. Наибольшее диагональное сечение — равнобедренный треугольник, основание которого равно $2R$; отсюда следует, что половина основания треугольника равна стороне правильного шестиугольника. Итак, для построения даны: сторона основания, высота и ребро пирамиды. Построив по данной стороне правильный шестиугольник и высоту пирамиды, получаем искомую пирамиду.

7. Построив изображение тетраэдра, каждое ребро которого равно a, и отметив центры его граней, которыми являются точки пересечения медиан, находим расстояние между центрами его граней, оно равно $\frac{a}{3}$ (рис. 191).

8. Из рис. 191 убеждаемся, что высоты AO_1 и SO делятся в отношении $OO_1:AS = \frac{a}{3}:a = 1:3$.

9. Порядок построения следующий: сперва строится ромб с высотой h и вписанная в него окружность радиуса $\frac{h}{2}$ (рис 192а); это задача планиметрическая; проводится окружность и ее диаметр, затем две параллельные касательные и другие две параллельные касательные, пересекающие первые две. Надо иметь в виду, что задача допускает бесчисленное множество решений; в частном случае имеем квадрат со стороной h.

По условию все грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, а потому *высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей*.

После этого строим на горизонтальной плоскости ромб, высота которого EF параллельна вертикальной плоскости чертежа (рис. 192б); проводим через точку E под углом 45° ($\varphi = 45$) сторону BC ромба и через точку F — сторону $AD \parallel BC$; отложив $FD = EB$ и $FA = EC$, соединяем прямыми точки A и B и точки D и C. Построив, наконец, при точке E угол α, продолжаем его сторону ES до пересечения с высотою OS, и тогда точка пересечения S — вершина пирамиды $SABCD$.

Следует указать, что высота пирамиды зависит не от формы ромба, а исключительно от высоты ромба и угла α; этим и объясняется, что форма ромба может

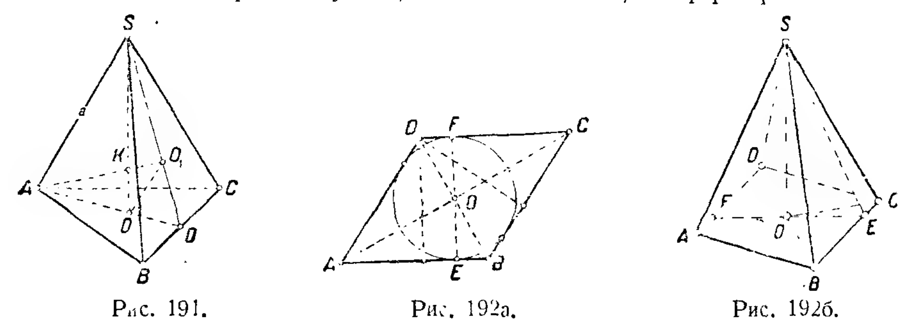


Рис. 191. Рис. 192а. Рис. 192б.

быть неопределенной, так как имеется бесчисленное множество ромбов, имеющих одну и ту же высоту h. На эту сторону желательно обратить внимание учащихся, дабы они не полагали, что задача вообще невозможна.

Вычисление Высота пирамиды равна половине высоты основания, так как она является катетом SO равнобедренного прямоугольного треугольника SOE, один из катетов которого $OS = \frac{h}{2}$. Итак, $H = \frac{h}{2} = 1$.

10. Построение изображения такой пирамиды было дано в задаче 4 (вопрос 3-й). Высоту $SO = H$ (рис. 188) находим из прямоугольного треугольника SOC. Обозначим ребро SC через l, тогда $H^2 = l^2 - OC^2$, но

$$OC = \frac{1}{2} a \sqrt{2},$$

следовательно,

$$H^2 = l^2 - \frac{a^2}{2}.$$

Остается найти l. Находим сперва часть l, а именно — отрезок $KC = x$, из треугольника BKC, для чего предварительно вычисляем $BK = y$.

Если $BK = y$, то $DB = a\sqrt{2} = y\sqrt{3}$, ибо $\angle BKD = 120°$, откуда

$$y = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

а потому $KC^2 = a^2 - \frac{6a^2}{9} = \frac{3a^2}{9}$ и $KC = \frac{a\sqrt{3}}{3} = x$.

Наконец, имеем из треугольника SOC:

$$SC:OC = OC:KC,$$

или $l:\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}:\frac{a\sqrt{3}}{3}$ и $l = \frac{2a^2\cdot 3}{4a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

таким образом, $H^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4}$ и $H = \frac{a}{2} = 1$ при $a = 2$.

Данная задача дает, с одной стороны, материал для повторения числовой зависимости между элементами прямоугольного треугольника, с другой стороны, имеет целью научить учащихся вычислять отдельные элементы пирамиды.

11. Если высота пирамиды разделена на n равных частей, то, обозначив площадь первого от вершины сечения через S_1 и высоту пирамиды через H, имеем:

$$\frac{S_1}{Q} = \frac{\left(\frac{H}{n}\right)^2}{H^2},$$

откуда

$$S_1 = \frac{Q}{n^2} = Q\left(\frac{1}{n}\right)^2.$$

Точно так же, обозначив площадь второго от вершины сечения через S_2, имеем:

$$\frac{S_2}{Q} = \frac{\left(\frac{2H}{n}\right)^2}{H^2} \quad \text{и} \quad S_2 = Q\left(\frac{2}{n}\right)^2.$$

Таким же образом находим затем:

$$S_3 = Q\left(\frac{3}{n}\right)^2 \text{ и т. д., } S_{n-1} = Q\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Для контроля можно еще взять:

$$S_n = Q\left(\frac{n}{n}\right)^2 = Q.$$

Пользуясь числовыми данными, находим:

$$S_1 = 0{,}12\ м^2, \quad S_2 = 0{,}48\ м^2, \quad S_3 = 1{,}08\ м^2 \text{ и т. д.}$$

12. Построение пирамиды дано в задаче 4 (вопрос 1). Целесообразно построить пирамиду так, чтобы диагональное сечение SAC (рис. 193) было параллельно вертикальной плоскости чертежа. Выполнив такое построение, проводим $AK \perp SC$. Прямая AK пересекает высоту SO в точке O_1. Чтобы определить положение плоскости сечения, рассуждаем так: $SC \perp$ пл. сечения; $SC \perp BD$, следовательно, $SC \perp MN$, где $MN \parallel BD$, значит MN должно лежать в плоскости сечения, а потому $ANKM$ — искомое сечение.

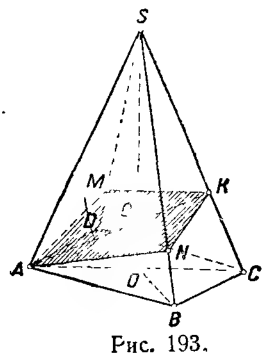


Рис. 193.

Сечение $ANKM$ — дельтоид; его площадь равна половине произведения его диагоналей $\frac{AK\cdot MN}{2}$. Треугольник ASC — равносторонний, так как

$$\angle SAC = 60° = \angle SCA;$$

сторона его $AC = a\sqrt{2}$, а потому

$$AK = \frac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2};$$

SO в точке O_1 делится в отношении 1:2, считая от основания, а потому

$$\frac{BD}{MN} = \frac{3}{2}, \quad \text{или} \quad MN = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}a\sqrt{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

Таким образом, имеем: площадь сечения равна

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{2a\sqrt{2}}{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{3}\text{ кв. ед.}=\frac{100\sqrt{3}}{3}\approx 58\text{ кв. ед.}$$

13. Для построения пирамиды заданы двугранные углы, а потому целесообразно построить изображение пирамиды так, чтобы сечение, проходящее через две противолежащие апофемы, лежало в плоскости чертежа.

Сперва следует построить правильный шестиугольник по его стороне a и его ось симметрии $KL=a\sqrt{3}$ (рис. 194а). Сечение, проходящее через KL и высоту, является в условиях данной задачи равносторонним треугольником, а потому высота пирамиды $H=\frac{a\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=1\frac{1}{2}a$. Итак, нужно построить шестиугольную правильную пирамиду по стороне a и высоте $H=1\frac{1}{2}a$ (рис. 194б).

Построение сечения выполняется аналогично построению, указанному в предыдущей задаче. Сечение — шестиугольник $AMNOPF$, в котором $AF \parallel ON$, $AM \parallel OP$ и $MN \parallel PF$. Шестиугольник состоит из двух трапеций: $FAMP$ и $PMNO$, причем $AF=a$, $ON=\frac{a}{2}$, $PM=\frac{4}{3}a$, так как

$$\frac{BF}{MP}=\frac{H}{\frac{2}{3}H},\quad\text{или}\quad\frac{2a}{MP}=\frac{3}{2}\quad\text{и}\quad MP=\frac{4a}{3}.$$

$KI=\frac{a\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{3a}{2}$ и делится в точке G в отношении $KG:GI=2:1$, следовательно $KG=a$ и $GI=\frac{a}{2}$. Таким образом, площадь сечения равна

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{4}{3}a\right)a+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}a+\frac{a}{2}\right)\frac{a}{2}=\frac{7a^2}{6}+\frac{11a^2}{24}=\frac{39a^2}{24}=\frac{13}{8}a^2\text{ кв. ед.}$$

14. Чтобы найти отдельные элементы пирамиды, необходимые для ее построения, следует построить развертку пирамиды в плоскости ее основания

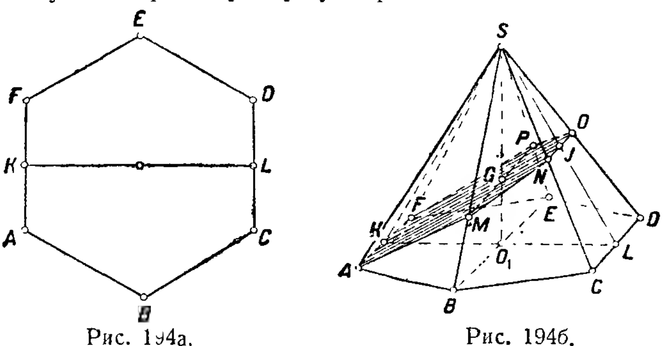


Рис. 194а. Рис. 194б.

(рис. 195а), а затем высоты SD и SE боковых граней до взаимного их пересечения в точке O; эти высоты SD и SE пересекутся, так как являются перпендикулярами к двум пересекающимся прямым BC и AC. Если после этого „сложить" пирамиду, то угол, образуемый прямыми SE и EO, является линейным углом двугранного угла, образуемого плоскостью боковой грани ASC с плоскостью основания ABC, угол же, образуемый прямыми SD и DO — линейным углом двугранного угла, образуемого плоскостью боковой грани BSC и плоскостью основания ABC. Прямая же SO служит высотой тетраэдра по следующим основаниям: сторона $BC\perp$ пл. SDO, а потому BC ортогональна и к прямой SO; кроме того, сторона $AC\perp$ пл. SEO, а потому она ортогональна к прямой SO; итак, $SO\perp BC$ и $SO\perp AC$, значит, $SO\perp$ пл. ABC, а это значит, что SO — высота тетраэдра.

Проведя затем $OF \perp AB$ и соединив точку F с вершиной S, имеем: $SF \perp AB$, т. е. OF и FS составляют одну прямую, перпендикулярную к AB, и угол SFO *является линейным углом двугранного угла, образуемого боковой гранью* ASB с плоскостью основания ABC. Из построения усматриваем, что высота SO является катетом прямоугольного треугольника SOD, в котором даны гипотенуза SD и катет DO, следовательно, SO можно найти, если построить прямоугольный треугольник по катету OD и гипотенузе SD или по катету OE и гипотенузе SF. Порядок построения следующий: сначала строится развертка тетраэдра в плоскости его основания, затем находят точку пересечения O высот SE и SD боковых граней и определяют построением высоту тетраэдра. Чтобы, наконец, получить искомое изображение тетраэдра, строим треугольник — основание ABC (рис. 195б),

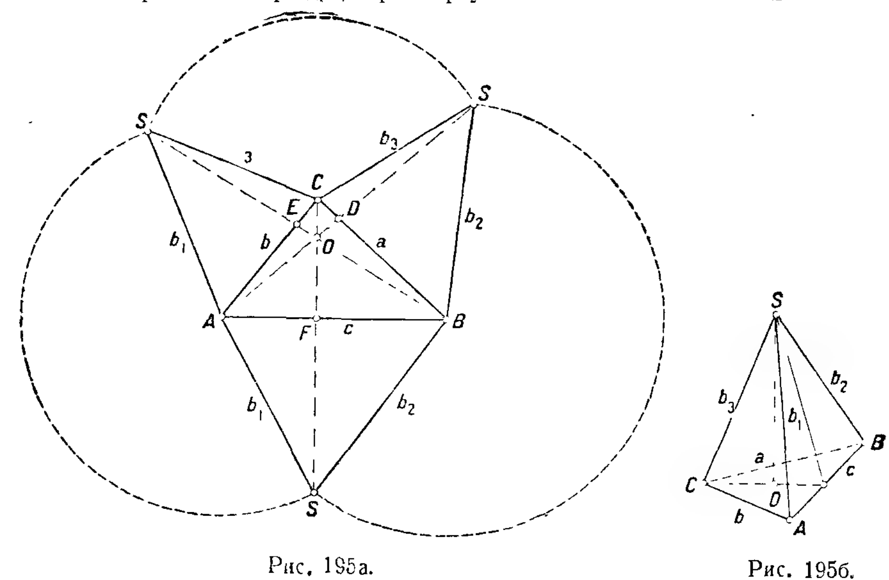


Рис. 195а. Рис. 195б.

находим соответствующим построением точку O, проводим затем в точке O перпендикуляр и откладываем отрезок SO, равный высоте тетраэдра, и соединяем точку S с точками A, B и C.

Построение возможно, если

$$
\begin{aligned}
b - c &< a < b + c,\\
b_2 - b_3 &< a < b_2 + b_3,\\
b_3 - b_1 &< b < b_3 + b_1,\\
b_1 - b_2 &< c < b_1 + b_2.
\end{aligned}
$$

Задача при выполнении указанных условий возможна и допускает одно решение. Итак, шестью ребрами треугольная пирамида определяется однозначно.

15. Отложив от вершины S пирамиды на боковых ребрах равные отрезки SA, SB и SC, проводим через концы A, B и C отрезков плоскость; эта плоскость удовлетворяет одному из условий задачи, а именно — ребра пирамиды наклонены к ней под одним и тем же углом: чтобы выполнить второе условие задачи, проводим плоскость, параллельную плоскости ABC и проходящую через данную точку; получим искомую плоскость.

16. Построение изображения пирамиды сводится к построению, данному в задаче 1.

Построив правильную треугольную пирамиду по стороне основания a и двугранному углу при основании, проводим в ней параллельное сечение со стороной b (рис. 196а).

Для выполнения построения, указанного в данной задаче, построим треугольник BSC (рис. 196б); на его стороне BC отложим отрезок $BM = b$, прово-

дим $MC_1 \parallel BS$, а через точку C_1 — прямую C_1B_1, тогда отрезок C_1B_1 и будет стороной параллельного сечения усеченной пирамиды; эта сторона равна b.

Для нахождения высоты усеченной пирамиды следует вычертить фигуру, в состав которой она входит; это — прямоугольная трапеция OKK_1O_1 (рис. 196в). В ней

$$OK = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad O_1K_1 = \frac{b\sqrt{3}}{6}; \quad K_2K = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{6};$$

$$KK_1 = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{6}\cdot 2 = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{3},$$

а потому

$$K_1K_2 = \sqrt{\frac{(a-b)^2\cdot 3}{9} - \frac{(a-b)^2\cdot 3}{36}} = \frac{3(a-b)}{6} = \frac{a-b}{2}.$$

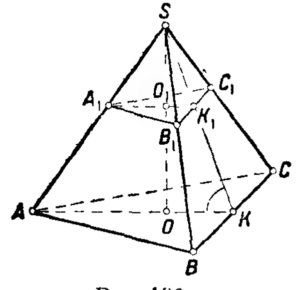


Рис. 196а.

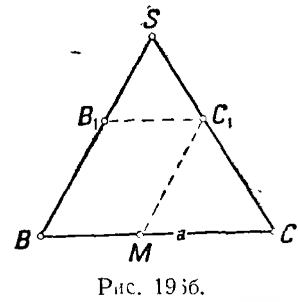


Рис. 196б.

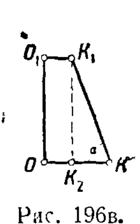


Рис. 196в.

17. Построение видно из рис. 197. В сечении получается пятиугольник. Дано:

$$SO = mx; \quad AC = nx; \quad AB = a.$$

Решение:

$$AC = a\sqrt{2}; \quad nx = a\sqrt{2}; \quad x = \frac{a\sqrt{2}}{n}; \quad SO = \frac{ma\sqrt{2}}{n}.$$

$$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{ma\sqrt{2}}{n}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{2a^2n^2 + 8a^2m^2}{4n^2}} = \frac{a}{2n}\sqrt{2n^2 + 8m^2}.$$

$$KL = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad O_1O_2 = \frac{a}{4n}\sqrt{2n^2 + 8m^2}; \quad O_1N = \frac{1}{2}\cdot OO_1 = \frac{a}{8n}\sqrt{2n^2 + 8m^2}.$$

$$\text{Пл. } KLMNP = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a}{4n}\sqrt{2n^2 + 8m^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a}{8n}\sqrt{2n^2 + 8m^2} =$$

$$= \frac{a^2}{4n}\sqrt{n^2 + 4m^2} + \frac{a^2}{16n}\sqrt{n^2 + 4m^2} =$$

$$= \frac{5a^2}{16n}\sqrt{n^2 + 4m^2}\ \text{кв. ед.} = 5\sqrt{2}\ см^2 \approx$$

$$\approx 7{,}1\ см^2.$$

$$\angle SAO = \alpha; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{SO}{AO} = \frac{mx\cdot 2}{nx} =$$

$$= \frac{2m}{n} = 1; \quad \alpha = 45^\circ.$$

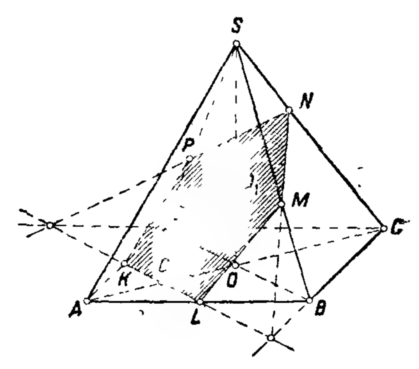


Рис. 197.

Таким образом, $\angle ASC = 90^\circ$, и диагональные сечения представляют собою равнобедренные прямоугольные треугольники.

18. Усеченная пирамида есть часть пирамиды, а потому следует всегда вычерчивать сперва пирамиду, а затем уже часть ее.

Допустим, что задача решена и высота полной пирамиды равна H, тогда

$$\frac{H}{H-h}=\frac{a}{b},$$

откуда

$$bH=aH-ah$$

и

$$H=\frac{ah}{a-b}.$$

По данным отрезкам a, b и h можно построить такой отрезок H; это — четвертый пропорциональный отрезков a, h и $a-b$. Следовательно, построение сводится к построению, данному в задаче 2 (вопрос 2), а затем проводится сечение на расстоянии h от плоскости основания построенной пирамиды.

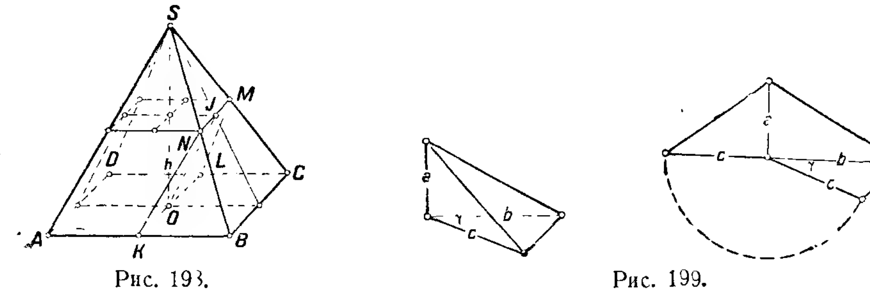


Рис. 198. Рис. 199.

Для построения сечения следует дать изображение пирамиды так, чтобы плоскость сечения, проходящего через противолежащие апофемы, была параллельна вертикальной плоскости чертежа (рис. 198); тогда, проведя через центр основания прямую $KL \parallel BC$ и в плоскости, проходящей через противоположные апофемы из точки O прямую OJ, параллельную апофеме, до пересечения с другой апофемой в точке J, проводим через точку J прямую $NM \parallel BC$ (или KL) и, соединив точки N и M с точками K и L, получим искомое сечение.

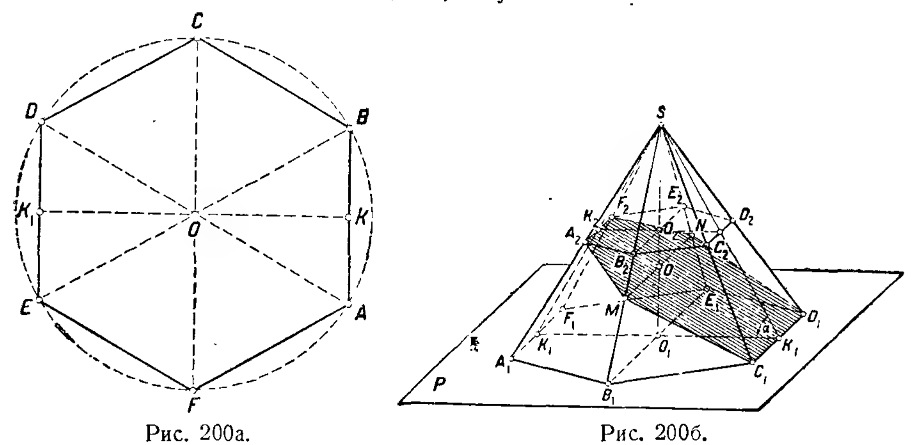


Рис. 200а. Рис. 200б.

19. Построение ясно из рис. 199.

20. Строим основание пирамиды — правильный шестиугольник со стороной a — так, чтобы прямая KK_1 — одна из его осей симметрии — была параллельна вертикальной плоскости чертежа (рис. 200а); такое построение позволит построить действительную величину угла α наклона боковой грани к плоскости основания. Затем строим на плоскости P шестиугольник и на оси симметрии KK_1 сечение,

проходящее через апофемы противолежащих боковых граней; это сечение KSK_1— равнобедренный треугольник с углами α при основании (рис. 200б). В данной задаче сечение — равносторонний треугольник, так как, согласно условию, $\alpha = 60°$. Чтобы получить усеченную пирамиду, следует провести сечение, параллельное основанию; в данной задаче, по условию которой $b = \frac{a}{2}$, нужно провести параллельное основанию сечение через середину высоты, а следовательно, и через середины боковых ребер пирамиды.

Учащимся должно быть указано, что при построении усеченной пирамиды более целесообразно строить сперва пирамиду.

Согласно условию, сечение должно пройти через противолежащие стороны оснований, положим, через стороны C_1D_1 и A_2F_2, следовательно, A_2F_2 и C_1D_1 — стороны сечения. Прямая KK_2, соединяющая середины этих сторон, принадлежит плоскости сечения, она же лежит и в плоскости KSK_1, а потому пересекает высоту SO_1 пирамиды, лежащую в той же плоскости, в некоторой точке O. Проводим затем в плоскости диагонального сечения B_1SE_1 через точку O прямую $MN \parallel B_1E_1$; прямая MN параллельна сторонам C_1D_1 и A_1F_1. Прямая MN лежит в плоскости сечения, а потому точки M и N, лежащие на ребрах пирамиды SB_1 и SE_1, — вершины сечения; в сечении получился шестиугольник $A_2MC_1D_1NF_2$; сечение это состоит из двух трапеций, основания которых — C_1D_1 и MN, A_2F_2 и MN.

Если найти площади этих трапеций, то тем самым будет найдена площадь сечения. Обозначив площадь сечения через $S_{\text{сеч}}$, высоты трапеций OK и OK_2 через x и y и основание MN через z, имеем.

$$S_{\text{сеч}} = S_1 + S_2 = \frac{a+z}{2} \cdot x + \frac{z+b}{2} y.$$

Таким образом, задача сводится к вычислению отрезков x, y и z. Для вычисления отрезка z воспользуемся треугольником MSN, стороной которого служит отрезок z, и подобным ему треугольником SB_1E_1. Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{B_1E_1}{MN} = \frac{SO_1}{SO}.$$

Для вычисления отрезка MN надо знать длину отрезков B_1E_1, SO_1 и SO.

$B_1E_1 = 2a$, так как сторона правильного шестиугольника равна a.

SO_1 — высота равностороннего треугольника SK_1K, сторона которого

$$KK_1 = 2O_1K = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3},$$

а потому

$$SO_1 = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}.$$

$SO = \frac{2}{3} SO_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a}{2} = a$, так как KK_2, будучи высотой треугольника SK_1K, делит высоту SO_1 на две части, SO и OO_1, в отношении 2:1; итак,

$$MN = \frac{B_1E_1 \cdot SO}{SO_1}$$

или

$$z = \frac{2a \cdot a}{\frac{3a}{2}} = \frac{4a}{3}.$$

Что касается отрезка $x = OK$ и отрезка $y = OK_2$, то мы уже знаем, что

$$OK = OS = a$$

и

$$OK_2 = \frac{1}{2} OK = \frac{a}{2},$$

а потому

$$S_{сеч}=\frac{a+\frac{4a}{3}}{2}\cdot a+\frac{\frac{4a}{3}+b}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{7a^2}{6}+\frac{4a^2+3ab}{12}=$$

$$=\frac{14a^2+4a^2+3ab}{12}=\frac{18a^2+3ab}{12}=\frac{3\cdot(6a+b)\,a}{12}=\frac{(6a+b)\,a}{4}.$$

Подставляя в данную формулу числовые значения для a и b, $a=4$ и $b=2$, имеем:

$$S_{сеч}=\frac{(24+2)\cdot 4}{4}=26 \text{ кв. ед.}$$

Ниже приводим примерную запись последовательного расположения вычисления площади сечения:

I.

$$S_{сеч}=S_{MNF_2A_2}+S_{MND_1C_1}.$$

$$A_1B_1=a=4;\quad A_2B_2=b=2;\quad \angle SKK_1=\alpha=60^\circ.$$

$$S_{MNF_2A_2}=\frac{A_2F_2+MN}{2}\cdot OK_2;\quad S_{MND_1C_1}=\frac{C_1D_1+MN}{2}\cdot OK.$$

$$A_2F_2=b;\quad OK_2=x;\quad OK=y;\quad MN=z;\quad C_1D_1=a.$$

$$S_{сеч}=\frac{b+z}{2}\cdot x+\frac{a+z}{2}\cdot y.$$

$$x=?\quad y=?\quad z=?$$

II.

$$\Delta KSK_1.$$

$$KK_1=KS=SK_1=2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}.$$

$$OK_2=\frac{1}{3}KK_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{2};\quad x=\frac{a}{2}.$$

$$OK=\frac{2}{3}KK_2=a;\quad y=a.$$

$$\Delta MSN \sim \Delta B_1SE_1.$$

$$\frac{MN}{B_1E_1}=\frac{SO_1}{SO};\quad B_1E_1=2a;\quad SO_1=KK_2=\frac{3a}{2};\quad SO=OK=a.$$

$$\frac{z}{2a}=\frac{a\,2}{3\cdot a};\quad z=\frac{4a}{3}.$$

III.

$$S_{сеч}=\frac{b+\frac{4a}{3}}{2}\cdot\frac{a}{2}+\frac{a+\frac{4a}{3}}{2}\cdot a=\frac{3ab+4a^2}{12}+\frac{7a^2}{6}=$$

$$=\frac{18a^2+3ab}{12}=\frac{3a\,(6a+b)}{12}.$$

$$S_{сеч}=\frac{a\,(6a+b)}{4}=\frac{4\,(24+2)}{4}=26 \text{ кв. ед.}$$

Подобного рода запись показывает учащимся, в какой последовательности проводятся вычисления. Записав условие и требование задачи, учащиеся видят, что для вычисления площади сечения (I) необходимо вычислить отрезки x, y и z. Эти последние находятся на основании существующей зависимости между искомыми и данными величинами a, b и α (II); когда x, y и z вычислены, то

задача тем самым решена, так как остается только подставить найденные значения искомых отрезков x, y и z в формулу площади сечения (III).

В данном разделе приведено небольшое число задач на вычисления; это отнюдь не значит, что задачами на вычисление следует пренебречь. В настоящей книге число задач подобного рода ограничено, так как их имеется достаточное число во всех задачниках. Решение последней из приведенных задач имеет целью показать, как следует вести и располагать запись при решении задачи на вычислен е, и отметить, что при подборе задач на вычисление следует, главным образом, останавливаться на задачах, в которых геометрическая, а не вычислительная сторона выдвигается на первое место.

§ 40. Линии и углы в пирамиде.

1. В этом разделе следует рассмотреть зависимости между некоторыми неосновными элементами пирамиды, в частности — зависимости между элементами треугольной пирамиды; эти зависимости аналогичны зависимостям между элементами многоугольника и треугольника. Приводимые ниже теоремы и построения могут быть использованы в качестве тем для кружковой работы. Эти вопросы могут быть поставлены в целях углубления знаний учащихся и развития их пространственных представлений.

Следует обратить внимание на различие понятий: правильная треугольная пирамида и правильный тетраэдр. Правильной треугольной пирамидой называется пирамида, основанием которой служит правильный треугольник и боковые грани которой — равные между собою равнобедренные треугольники, сходящиеся своими вершинами в одной точке; правильным же тетраэдром обычно называется такая правильная треугольная пирамида, все четыре грани которой — равные правильные треугольники. Итак, правильная треугольная пирамида и правильный тетраэдр — не одно и то же. Надо помнить, что правильный тетраэдр есть и правильная треугольная пирамида, однако, не всякая правильная треугольная пирамида есть в то же время и правильный тетраэдр.

2. Все плоскости, проведенные в пирамиде через боковые ее ребра перпендикулярно к основанию пирамиды, пересекаются по одной прямой — высоте пирамиды. Доказать.

В самом деле, если провести две плоскости, одну через одно ребро, другую через другое ребро пирамиды перпендикулярно к основанию, то эти плоскости, имея общую точку — вершину пирамиды, имеют и общую прямую; последняя перпендикулярна к плоскости основания, так как плоскость, перпендикулярная к двум пересекающимся плоскостям, перпендикулярна и к линии их пересечения. Третья плоскость, проходящая через третье ребро пирамиды, а следовательно, и через вершину пирамиды, пересекается с каждой из двух уже проведенных плоскостей по той же прямой, проходящей через вершину, так как из одной точки — вершины пирамиды — можно провести к плоскости основания только один перпендикуляр. Итак, все плоскости, проведенные в пирамиде через боковые ее ребра перпендикулярно к ее основанию, пересекаются по одной прямой; эта прямая — высота пирамиды.

После разбора этой теоремы можно доказать, что

1) отношение двух боковых ребер равно обратному отношению синусов соответствующих углов наклона ребер к плоскости основания;

2) отношение высот двух боковых граней пирамиды равно обратному отношению синусов соответствующих углов наклона граней к плоскости основания.

Такого рода упражнения способствуют закреплению у учащихся представления об углах наклона ребер и граней пирамиды, одновременно подчеркивая их различие, и подготовляет учащихся к решению задач по стереометрии с приложением тригонометрии.

3. Теоремы о свойствах треугольной пирамиды или тетраэдра:

а) Три плоскости, проведенные через медианы боковых граней тетраэдра и противолежащие им боковые ребра, пересекаются по одной прямой.

Данную теорему следует сопоставить с аналогичной теоремой из планиметрии: **три прямые, проведенные через середины сторон треугольника и противолежащие им вершины, пересекаются в одной точке.**

б) Прямые, соединяющие вершины тетраэдра с центром тяжести противолежащих граней, пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении 1:3, считая от грани. Точка эта называется **центром тяжести** тетраэдра.

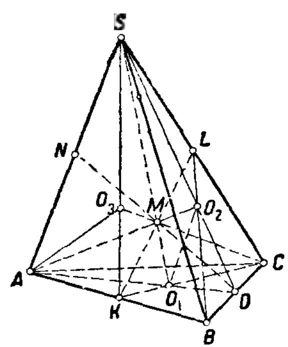


Рис. 201.

Приводится аналогичная теорема из планиметрии: **прямые, соединяющие вершины треугольника с центром тяжести противолежащих им сторон, пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении 1:2, считая от стороны.**

Следует отметить, что „центром тяжести" однородной треугольной пластинки называется в физике точка пересечения медиан пластинки; это название перенесено в геометрию, и им обозначается точка пересечения медиан треугольника.

в) Отрезки, концы которых соединяют середины противолежащих ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке — в центре тяжести тетраэдра.

г) Биссекторные плоскости тетраэдра пересекаются в одной точке, удаленной от граней его на одно и то же расстояние.

Приводим в соответствующем порядке доказательства этих теорем.

а) Плоскости, проведенные через медианы боковых граней тетраэдра, пересекают плоскость основания по медианам основания, которые, как известно, пересекаются в одной точке, следовательно, проведенные плоскости имеют две общие точки: вершину пирамиды и центр тяжести основания, а потому имеют и одну общую прямую, проходящую через эти две точки.

б) Пусть O_2 — центр тяжести боковой грани BSC. Плоскость, проведенная через AO_2 и медиану AD основания тетраэдра (рис. 201), пересечет плоскость его боковой грани BSC по медиане SD. Проведя таким же построением все остальные плоскости, нетрудно убедиться, что все плоскости пересекаются в одной точке M. Соединив центры тяжести O_1 основания и O_2 одной из боковых граней, находим, что треугольники ADS и O_1DO_2 подобны, так как $O_1O_2 \parallel AS$, ибо прямая O_1O_2 отсекает от каждой из сторон DS и DA $\frac{1}{3}$ ее длины, считая от вершины D. Из подобия треугольников ADS и O_1DO_2 следует, что $\frac{SA}{O_1O_2} =$

$=\frac{AD}{O_1D}=\frac{3}{1}$; из подобия же треугольников AMS и O_1MO_2 имеем: $\frac{AM}{MO_2}=\frac{SA}{O_1O_2}=3:1=\frac{SM}{MO_1}$.

в) Пусть KK_1 и LL_1 — отрезки, соединяющие середины K и K_1, L и L_1 ребер AB и SC, BC и SA тетраэдра $SABC$ (рис. 202а; LL_1 на рисунке не проведена); отрезки KK_1 и LL_1 пересекаются в точке O и делятся ею пополам. Действительно, отрезки KK_1 и LL_1 служат диагоналями параллелограма KLK_1L_1, так как $L_1K_1 \parallel LK$ как средние линии треугольников ASC и ABC, и каждый из них параллелен стороне AC основания и равен $\frac{1}{2}AC$. На том же основании отрезки MM_1 и KK_1 пересекаются в точке O и делятся ею пополам. Отсюда следует, что все три отрезка KK_1, MM_1 и LL_1 пересекаются в одной точке.

Необходимо еще доказать, что точка O является центром тяжести тетраэдра. Для этой цели рассмотрим плоскость SKC и прямую SO_1, соединяющую вершину S с центром тяжести основания ABC.

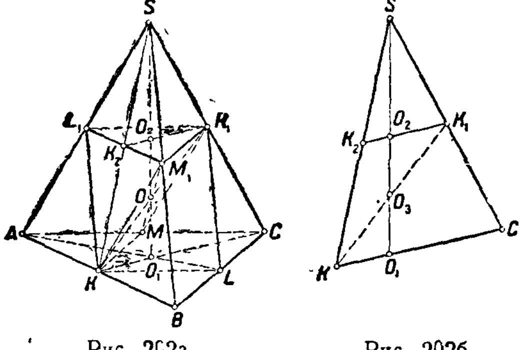


Рис. 202а. Рис. 202б.

Прямая SO_1, пересекая отрезок KK_1, отсекает на отрезках K_1K_2 и KC отрезки O_2K_2 и O_1K_1, причем $O_2K_2 = \frac{1}{2}O_2K_1=\frac{1}{2}O_1K$, следовательно $O_2K_1=O_1K$: допустим, что прямая SO_1 пересекает KK_1 в некоторой точке O_3 (рис. 202б), и докажем, что точка O_3 должна совпасть с точкой O, центром тяжести тетраэдра.

Рассмотрим треугольники O_3O_2K и O_3O_1K; они равны (УСУ), так как $O_2K_1=O_1K$, $\angle K_1O_3O_2=\angle KO_3O_1$, как противоположные, и $\angle KO_1O_3= =\angle K_1O_2O_3$, как внутренние накрест лежащие, ибо $K_2K_1 \parallel KC$; из равенства этих треугольников следует, что $O_3K_1=O_3K$, а это означает, что точка O_3 — середина отрезка KK_1. Итак, прямая SO_1 проходит через середину отрезка KK_1, а следовательно, и через точку пересечения отрезков KK_1, LL_1 и MM_1. Кроме того, $O_1O_3=\frac{1}{2}O_1O_2=\frac{1}{4}SO_1$, так как $O_1O_2=O_2S=\frac{1}{2}SO_1$, а потому точка пересечения отрезков KK_1, LL_1 и MM_1 совпадает с „центром тяжести“ тетраэдра.

г) Теорема доказывается на основании свойств трехгранного угла, рассмотренных выше.

4. Сумма площадей боковых граней пирамиды больше площади ее основания. Доказать.

Доказательство основано на применении формулы, определяющей зависимость между площадью самой фигуры и площадью ее проекции. Теорема может быть предложена учащимся для самостоятельной проработки.

Можно также доказать, что **в треугольной пирамиде, плоские углы при вершине которой — прямые, квадрат площади основания равен сумме квадратов площадей боковых граней.**

Аналогичная теорема была рассмотрена в разделе § 31, п. 4.

5. Если две пары противолежащих (скрещивающихся) ребер треугольной пирамиды равны, то также равны две грани пирамиды, имеющие одно общее ребро из двух неравных ребер. Доказать.

Теорема доказывается на основании признака равенства треугольников по трем сторонам (ССС).

6. Если основание высоты треугольной пирамиды совпадает с ортоцентром основания пирамиды, то сумма квадратов двух противолежащих (скрещивающихся) ребер есть величина постоянная. Доказать.

Дана треугольная пирамида $SABC$ (рис. 203). Обозначим стороны ее основания через a, b и c, ее боковые ребра, лежащие против соответственных сторон основания, через a_1, b_1 и c_1. Строим высоту SO пирамиды; тогда из треугольника SAO имеем: $a_1^2 = SO^2 + AO^2$; из треугольника AMO имеем: $AO^2 = AM^2 + OM^2$, значит, $a_1^2 = SO^2 + AM^2 + OM^2$; из треугольника ABC имеем: $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot AM$, а потому

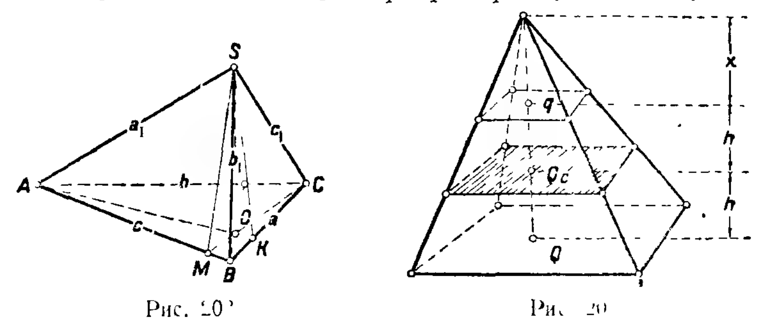


Рис. 203 Рис. 204

$$a_1^2 + a^2 = SO^2 + AM^2 + OM^2 + b^2 + c^2 - 2c \cdot AM =$$
$$= SO^2 + OM^2 + b^2 + (c - AM)^2 =$$
$$= SO^2 + OM^2 + b^2 + MB^2 =$$
$$= SO^2 + OB^2 + b^2 = b_1^2 + b^2.$$

Итак,

$$a_1^2 + a^2 = b_1^2 + b^2.$$

Так же доказывается, что

$$a_1^2 + a^2 = c_1^2 + c^2,$$

следовательно,

$$a_1^2 + a^2 = b_1^2 + b^2 = c_1^2 + c^2.$$

7. Площадь среднего сечения усеченной пирамиды равна среднему арифметическому среднего геометрического и среднего арифметического площадей ее оснований. Доказать.

Обозначив площадь среднего сечения через Q_c (рис. 204), площади оснований через Q и q, высоту усеченной пирамиды через $2h$, а высоту пирамиды, дополняющей усеченную пирамиду до полной, через x, имеем:

$$\frac{Q}{Q_c} = \frac{(2h + x)^2}{(h + x)^2} \quad \text{и} \quad \frac{Q_c}{q} = \frac{(h + x)^2}{x^2}$$

или

$$\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{Q_c}}=\frac{2h+x}{h+x}\ (1) \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{Q_c}}{\sqrt{q}}=\frac{h+x}{x}. \qquad (2)$$

Составив производную пропорцию для каждой из полученных пропорций, имеем:

$$\frac{\sqrt{Q}-\sqrt{Q_c}}{\sqrt{Q_c}}=\frac{h}{h+x}\ (1a) \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{Q_c}-\sqrt{q}}{\sqrt{q}}=\frac{h}{x} \qquad (2a)$$

или

$$\frac{\sqrt{Q_c}-\sqrt{q}}{\sqrt{Q_c}}=\frac{h}{h+x} \qquad (2b)$$

последние две производные пропорции (2a) и (2b) получены из равенства (2); сопоставляя равенства (1a) и (2b), имеем:

$$\frac{\sqrt{Q}-\sqrt{Q_c}}{\sqrt{Q_c}}=\frac{\sqrt{Q_c}-\sqrt{q}}{\sqrt{Q_c}},$$

откуда

$$\sqrt{Q}+\sqrt{q}=2\sqrt{Q_c} \quad \text{или} \quad Q+q+2\sqrt{Qq}=4Q_c,$$

и, следовательно,

$$Q_c=\frac{Q+q+2\sqrt{Qq}}{4}=\frac{\frac{Q+q}{2}+\sqrt{Qq}}{2}.$$

Дополнение тетраэдра до параллелепипеда.

8. Тетраэдр однозначно определяется своими шестью ребрами. Обозначим стороны его основания через a, b и c и противолежащие сторонам основания боковые ребра через a_1, b_1 и c_1.

Если из какой-либо вершины C параллелепипеда провести три диагонали CA, CB и CD его боковых граней и соединить концы A, B и D

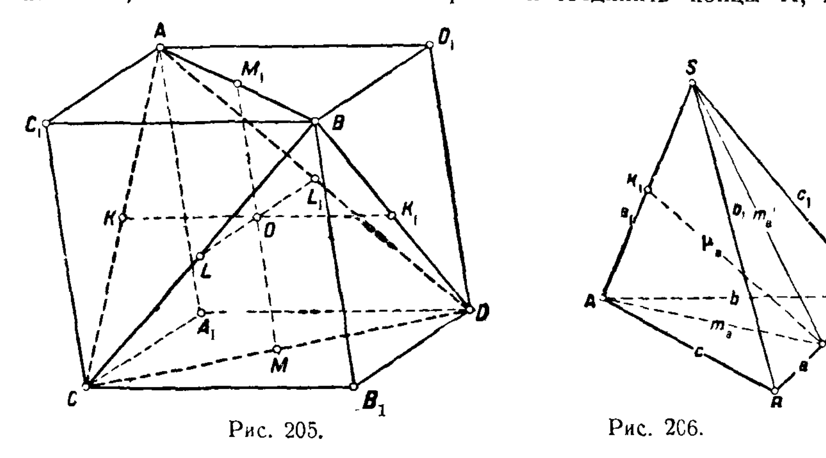


Рис. 205.

Рис. 206.

этих диагоналей прямыми, то получится очертание тетраэдра $CABD$ (рис. 205).

Если в тетраэдре построить отрезки KK_1, LL_1 и MM_1, концами которых служат середины попарно противолежащих ребер тетраэдра, то

эти отрезки соответственно равны ребрам параллелепипеда и им параллельны: $KK_1 \parallel CB_1$, $LL_1 \parallel A_1C$ и $MM_1 \parallel AA_1$, так как точки K и K_1, L и L_1, M и M_1 — центры симметрии противолежащих граней параллелепипеда.

Сделанный вывод подтверждает, что прямые, соединяющие середины двух пар противолежащих ребер тетраэдра, вписанного указанным способом в параллелепипед, пересекаются в одной точке, в которой они взаимно делятся пополам. На основании этого свойства можно дополнить тетраэдр до параллелепипеда.

а) Вычисление средней линии тетраэдра. В тетраэдре $SABC$ (рис. 206) KK_1 — одна из его средних линий, обозначим ее через μ_a, $KK_1 = \mu_a$; средняя линия KK_1 является одновременно и медианой треугольника SKA и поэтому может быть вычислена по трем сторонам треугольника ASK; при этом сторона $SK = m'_a$ — медиана треугольника SBC, сторона $AK = m_a$ — медиана треугольника ABC и сторона $SA = a_1$ — ребро тетраэдра. Таким образом,

$$4\mu_a^2 = 2m_a'^2 + 2m_a^2 - a_1^2,$$

где

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \quad \text{и} \quad 4m_a'^2 = 2b_1^2 + 2c_1^2 - a^2,$$

а потому

$$4\mu_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} + b_1^2 + c_1^2 - \frac{a^2}{2} - a_1^2$$

или

$$\mu_a^2 = \frac{b^2 + b_1^2 + c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2}{4}.$$

Так же, по аналогии, пользуясь циклической подстановкой, находим:

$$\mu_b^2 = \frac{c^2 + c_1^2 + a^2 + a_1^2 - b^2 - b_1^2}{4}$$

и

$$\mu_c^2 = \frac{a^2 + a_1^2 + b^2 + l_1^2 - c^2 - c_1^2}{4}.$$

б) Вычисление угла, образуемого двумя противолежащими ребрами тетраэдра. Ребра эти, как, например, ребра A_1D_2 и B_2C_1, — скрещивающиеся прямые. Из рис. 207 видно, что угол, образуемый ребрами A_1D_2 и B_2C_1, равен углу, образуемому диагоналями A_2D_1 и D_2A_1 боковой грани $A_2A_1D_1D_2$ параллелепипеда, так как $A_2D_1 \parallel B_2C_1$. Таким образом, задача сводится к вычислению угла, образуемого диагоналями параллелограма $A_2A_1D_1D_2$, по двум данным его диагоналям A_2D_1 и D_2A_1 и стороне $A_1D_1 = MM_1$; задача возможна. Воспользуемся формулой косинусов для вычисления угла треугольника ABC:

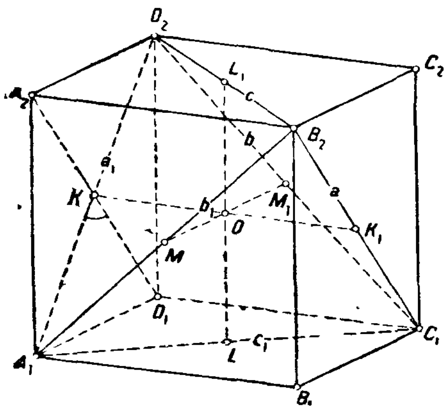


Рис. 207.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

или

$$BC^2 = CA^2 + AB^2 - 2 \cdot CA \cdot AB \cdot \cos A,$$

откуда

$$\cos A = \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2AB \cdot CA}.$$

Для определения угла, образуемого ребрами a и a_1 тетраэдра, находим угол, образуемый диагоналями a и a_1 параллелограма, сторона которого $A_1D_1 = \mu_b$. Итак,

$$\cos(\widehat{a,a_1}) = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - \frac{c^2 + c_1^2 + a^2 + a_1^2 - b^2 - b_1^2}{4}}{2\frac{a}{2} \cdot \frac{a_1}{2}} =$$

$$= \frac{a^2 + a_1^2 - c^2 - c_1^2 - a^2 - a_1^2 + b^2 + b_1^2}{2aa_1} = \frac{b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2}{2aa_1}.$$

Так же находим:

$$\cos(\widehat{b,b_1}) = \frac{c^2 + c_1^2 - a^2 - a_1^2}{2bb_1}$$

и

$$\cos(\widehat{c,c_1}) = \frac{a^2 + a_1^2 - b^2 - b_1^2}{2cc_1}.$$

Для правильной пирамиды, боковые ребра которой $a_1 = b_1 = c_1 = l$ и стороны основания которой $a = b = c$, находим:

$$\mu_a^2 = \frac{a^2 + l^2 + a^2 + l^2 - a^2 - l^2}{4} = \frac{a^2 + l^2}{4} = \mu_b^2 = \mu_c^2.$$

$$\cos(\widehat{a,l}) = \frac{a^2 + l^2 - a^2 - l^2}{2al} = 0,$$

т. е. угол, образуемый противолежащими ребрами, равен 90°, что означает, что противолежащие ребра взаимно ортогональны.

Если дан правильный четырехгранник, все ребра которого равны, то

$$\mu_a^2 = \frac{a^2 + a^2}{4} = \frac{a^2}{2} \quad \text{и} \quad \mu_a = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \mu_b = \mu_c.$$

В последнем случае отрезки $\mu_a = \mu_b = \mu_c$ в то же время являются кратчайшими расстояниями между двумя непересекающимися ребрами правильного тетраэдра, угол между которыми равен 90°. В самом деле, ребра A_1D_2 и B_2C_1 лежат в двух параллельных плоскостях, гранях $A_1D_1D_2A_2$ и $B_1C_1C_2B_2$, и расстояние между ними есть кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми A_1D_2 и B_2C_1, т. е. KK_1.

§ 41. Идея равенства и подобия пирамид.

О равенстве пирамид.

1. Если имеется в виду рассмотреть с учащимися вопрос о равенстве и подобии пирамид, следует начать с повторения определения равенства тел и признаков равенства призм, а затем перейти к разбору признаков равенства пирамид.

Первый признак равенства пирамид.

Теорема. **Две пирамиды конгруэнтны, если они имеют равные основания, по равному трехгранному углу при основании и по одной равной, одинаково расположенной грани равных трехгранных углов.**

Дано: пирамиды $S_1A_1B_1C_1D_1$ и $S_2A_2B_2C_2D_2$; $A_1B_1C_1D_1 = A_2B_2C_2D_2$; трехгранные углы при вершинах B_1 и B_2 равны; грань $A_1S_1B_1$ = грани $A_2S_2B_2$ (рис. 208).

Требуется доказать: пирамида $S_1A_1B_1C_1D_1$ = пирамиде $S_2A_2B_2C_2D_2$.

Доказательство. Первый шаг. Вложим пирамиду $S_2A_2B_2C_2D_2$ в пирамиду $S_1A_1B_1C_1D_1$ так, чтобы совпали равные трехгранные углы $A_1B_1S_1C_1$ и $A_2B_2S_2C_2$; в этом случае совпадут плоскости оснований пирамид, как грани равных трехгранных углов, следовательно, совпадут и основания, так как, согласно условию, они равны; в силу указанного совпадут и равные грани $A_1S_1B_1$ и $A_2S_2B_2$.

Второй шаг. Вершины S_1 и S_2, D_1 и D_2, C_1 и C_2 совпали, а потому совпадут ребра S_1D_1 и S_2D_2, S_1C_1 и S_2C_2 и, следовательно, совпадут грани пирамид, ибо две пересекающиеся прямые однозначно определяют положение плоскости.

Рис. 208.

Рис. 209.

Вывод. **Пирамиды совмещаются, следовательно, они конгруэнтны.**

Второй и третий признаки равенства пирамид формулируются и доказываются так же, как и второй и третий признаки равенства призм. Доказательство этих признаков основано на первом признаке, притом следует иметь в виду, что заданные в условии теорем грани должны быть одинаково расположены.

О подобии пирамид.

2. Определение, какие пирамиды называются подобными, такое же, какое дается для подобия призм. Приступая к разбору предложений о подобных пирамидах, следует сперва остановиться на рассмотрении частного случая, уже известного учащимся; именно, если пирамида пересекается плоскостью, параллельной плоскости основания, то отсекаемая часть пирамиды есть пирамида, подобная данной. Можно провести аналогию между указанной теоремой и следующей теоремой планиметрии: прямая, пересекающая обе стороны угла треугольника и параллельная третьей стороне, отсекает от данного треугольника треугольник, ему подобный.

После этого переходят к признакам подобия пирамид, которые аналогичны признакам подобия призм; их формулировка та же.

Первый признак подобия пирамид.

Дано: пирамиды I и II, при этом $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim A_2B_2C_2D_2E_2$; трехгранные углы при вершинах C_1 и C_2 равны; грань $B_1S_1C_1 \backsim$ грани $B_2S_2C_2$ (рис. 209).

Требуется доказать: пирамида $S_1A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim$ пирамиде $S_2A_2B_2C_2D_2E_2$.

Доказательство:

Первый шаг. $B_1S_1C_1 \backsim B_2S_2C_2$, а потому

$$\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{S_1C_1}{S_2C_2}. \tag{1}$$

Второй шаг. $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim A_2B_2C_2D_2E_2$, а потому

$$\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{C_1D_1}{C_2D_2}. \tag{2}$$

Третий шаг. Из сравнения пропорций (1) и (2) имеем:

$$\frac{S_1C_1}{S_2C_2} = \frac{C_1D_1}{C_2D_2}.$$

Четвертый шаг. Трехгранные углы при C_1 и C_2 равны, а потому $\angle S_1C_1D_1 = \angle S_2C_2D_2$.

Вывод:

$$\triangle S_1C_1D_1 \backsim \triangle S_2C_2D_2.$$

Пятый шаг. Из равенства тех же трехгранных углов следует, что двугранные углы при C_1D_1 и C_2D_2 равны.

Шестой шаг. Из подобия треугольников $S_1C_1D_1$ и $S_2C_2D_2$ следует, что $\angle S_1D_1C_1 = \angle S_2D_2C_2$.

Седьмой шаг. Из подобия оснований следует, что $\angle C_1D_1E_1 = \angle C_2D_2E_2$.

***Вывод.* Трехгранные углы при вершинах D_1 и D_2 равны по двум плоским углам и двугранному.**

Так же доказывается подобие граней, затем и равенство трехгранных углов при вершинах E_1 и E_2 и т. д.

Итак, пирамиды удовлетворяют определению подобия многогранников, следовательно, они подобны.

Второй и третий признаки подобия пирамид формулируются и доказываются как соответствующие признаки подобия призм; их доказательства основаны на первом признаке подобия пирамид.

§ 42. Идея подобия многогранников.

Соответствие подобных пирамид с подобием плоских фигур в планиметрии наводит на мысль о соответствии между подобными плоскими многоугольниками и подобными пространственными многогранниками. Так, можно доказать:

Два многогранника подобны, если они состоят из одинакового числа соответственно подобных и одинаково расположенных пирамид.

Теорема, аналогичная данной, рассматривается в планиметрии.

Дано: шесть пирамид, основаниями которых служат грани данных многогранников, подобны

$O_1A_1B_1C_1D_1 \backsim O_2A_2B_2C_2D_2$,

$O_1B_1C_1G_1F_1 \backsim O_2B_2C_2G_2F_2$ и т. д. (рис. 210).

Треб. док: многогранники I и II подобны.

Доказательство. Первый шаг. Грани многогранников подобны, ибо они служат основаниями подобных пирамид, на которые, согласно условию, разбиты оба многогранника.

Второй шаг. Трехгранные углы при вершинах многогранников, например A_1 и A_2, равны по следующим основаниям:

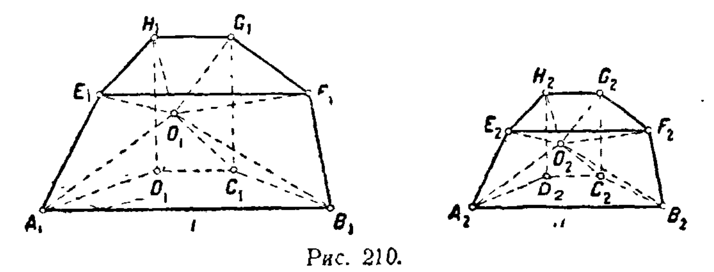


Рис. 210.

$\angle B_1A_1D_1 = \angle B_2A_2D_2$, так как пирамиды $O_1A_1B_1C_1D_1$ и $O_2A_2B_2C_2D_2$ подобны;

$\angle E_1A_1D_1 = \angle E_2A_2D_2$, так как $O_1A_1D_1H_1E_1 \sim O_2A_2D_2H_2E_2$;

$\angle E_1A_1B_1 = \angle E_2A_2B_2$, так как $O_1A_1B_1F_1E_1 \sim O_2A_2B_2F_2E_2$.

Отсюда следует, что трехгранные углы при вершинах A_1 и A_2 равны по трем соответственно равным плоским углам при вершине.

Так же доказывается равенство и остальных трехгранных углов многогранника, а потому многогранники подобны.

Теорема (обратная). **Подобные многогранники могут быть разбиты на одинаковое число соответственно подобных и одинаково расположенных пирамид.**

Данная обратная теорема также аналогична соответствующей обратной теореме планиметрии; аналогичен и метод ее доказательства.

Доказательство. Возьмем внутри I многогранника произвольную точку O_1 и соединим ее со всеми вершинами A_1, B_1, C_1,... многогранника; через полученные прямые и ребра многогранника проводим плоскости: $A_1O_1B_1$, $B_1O_1C_1$, $C_1O_1D_1$,... Таким построением многогранник разобьется на столько пирамид, сколько у многогранника граней, в данном примере — на шесть. Во II многограннике проводим плоскость $A_2O_2D_2$ под тем же двугранным углом к плоскости $A_2B_2C_2D_2$, под которым грань $A_1O_1D_1$ наклонена к плоскости $A_1B_1C_1D_1$, и строим в этой плоскости $\triangle A_2O_2D_2 \sim \triangle A_1O_1D_1$, $\angle O_2A_2D_2 = \angle O_1A_1D_1$ и $\angle O_2D_2A_2 = \angle O_1D_1A_1$; полученную точку O_2 соединим затем со всеми вершинами II многогранника и строим через проведенные прямые плоскости, тогда II многогранник разобьется также на пирамиды, число которых равно числу пирамид I многогранника, при этом все эти пирамиды подобны пирамидам I многогранника.

Рассмотрим, например, пирамиды $O_1A_1B_1C_1D_1$ и $O_2A_2B_2C_2D_2$. У них основания подобны, ибо многогранники подобны, $A_1B_1C_1D_1 \sim A_2B_2C_2D_2$, грани $A_1O_1D_1$ и $A_2O_2D_2$ подобны по построению; двугранные углы при ребрах A_1D_1 и A_2D_2 равны, следовательно, пирамиды подобны по второму признаку подобия пирамид.

Рассмотрим еще пирамиды $O_1A_1D_1H_1E_1$ и $O_2A_2D_2H_2E_2$. У них основания подобны вследствие подобия многогранников, $A_1D_1H_1E_1 \sim A_2D_2H_2E_2$;

грани $A_1O_1D_1$ и $A_2O_2D_2$ подобны, так как они являются гранями рассмотренных выше подобных пирамид; двугранные углы при A_1D_1 и A_2D_2 равны, так как

$$\angle(E_1A_1D_1H_1,\ B_1A_1D_1C_1) = \angle(E_2A_2D_2H_2,\ B_2A_2D_2C_2),$$

что следует из подобия многогранников, и

$$\angle(O_1A_1D_1,\ B_1A_1D_1C_1) = \angle(OAD,\ B_2A_2D_2C_2),$$

что следует из подобия предыдущих пирамид.

Если почленно вычесть соответственные части данных равенств, то разности углов дают в рассматриваемых пирамидах двугранные углы при ребрах A_1D_1 и A_2D_2; эти двугранные углы равны, так как равны уменьшаемые и вычитаемые.

Итак, пирамиды $O_1A_1D_1H_1E_1$ и $O_2A_2D_2H_2E_2$ удовлетворяют второму признаку подобия пирамид, следовательно, они подобны. Так же доказывается подобие и остальных пирамид, на которые разбиты оба многоугольника. Теорема доказана.

Взятые в подобных многогранниках точки O_1 и O_2, от соединения которых с вершинами многогранников оба многогранника разбиваются на одинаковое число подобных и одинаково расположенных пирамид, называются *сходственными* точками.

Прямые, соединяющие по две соответственные сходственные точки в каждом из подобных многогранников, называются *сходственными* линиями. Сходственными точками, понятно, будут и вершины многогранников.

Доказывается, что сходственные линии подобных многогранников пропорциональны сходственным ребрам, однако, на доказательстве этого предложения останавливаться не будем.

§ 43. Идея пространственной симметрии.

1. Учащимся следует напомнить из планиметрии, что две точки, A и B, называются симметричными относительно точки O, если отрезок AB, проходящий через точку O, делится ею пополам. Точка O — центр симметрии.

Две фигуры или две части одной фигуры называются симметричными относительно точки — центра симметрии, если каждой точке одной фигуры соответствует во второй фигуре одна и только одна точка, симметричная относительно того же центра.

Указанное в равной мере относится и к фигурам в пространстве.

Две точки, A и B, называются симметричными относительно прямой MN — оси симметрии, если они лежат на одном перпендикуляре к прямой MN, на одном и том же расстоянии от нее.

Две фигуры называются симметричными относительно оси, если каждой точке одной из них соответствует одна и только одна

Две точки, A и B, называются симметричными относительно плоскости P — плоскости симметрии, если они лежат на одном перпендикуляре к плоскости P, на равных расстояниях от этой плоскости.

Две фигуры или два тела называются симметричными относительно плоскости, если каждой

точка второй фигуры, симметричная относительно этой оси.

точке одной из них соответствует симметричная ей точка второй фигуры или второго тела по отношению к плоскости симметрии.

2. Два многогранных угла называются симметричными, если все плоские и двугранные углы одного из них соответственно равны плоским и двугранным углам другого, но расположены в „обратном" порядке. Так, на рис 211 дан трехгранный угол $OABC$, ребра которого продолжены за вершину O и образуют трехгранный угол $OA_1B_1C_1$; плоские углы одного соответственно равны плоским углам другого и двугранные углы одного соответственно равны двугранным углам другого; такие трехгранные углы — симметричные углы; их можно назвать противоположными по аналогии с противоположными углами в планиметрии. Симметричные трехгранные углы, вообще говоря, неконгруентны, т. е. при вложении одного трехгранного угла в другой они не совмещаются.

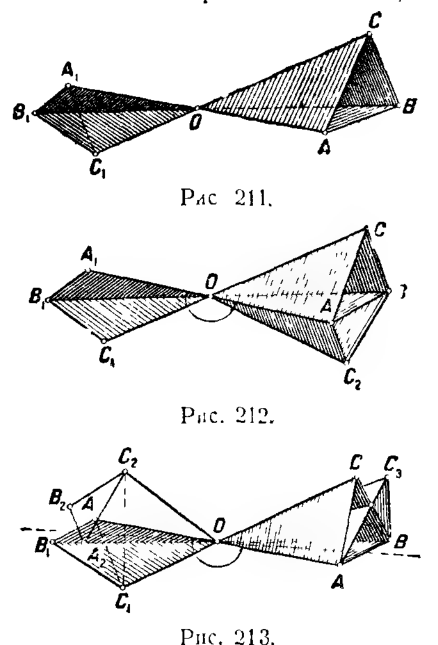


Рис 211.

Рис. 212.

Рис. 213.

Докажем, что **симметричные трехгранные углы с неравными плоскими углами несовместимы, а следовательно, и неконгруентны.**

В самом деле, пусть даны два противоположных трехгранных угла $OABC$ и $OA_1B_1C_1$; отметим, что соответственные грани их, например, грани OAB и $O_1A_1B_1$, лежат в одной плоскости, определяемой двумя пересекающимися прямыми AA_1 и BB_1 (рис. 212). Если повернуть грань A_1OB_1 в ее плоскости на 180° вокруг общей вершины O трехгранных углов, то эта грань совместится с гранью AOB, и ребро OC_1 займет положение OC_2; при этом ребра OC_2 и OC расположены по разные стороны от плоскости AOB.

Можно грани A_1OB_1 и AOB совместить и иначе. Повернем трехгранный угол $OA_1B_1C_1$ вокруг биссектрисы угла A_1OB_1 на 180° (рис. 213); она займет положение A_2OB_2; затем повернем грань A_2OB_2 и весь трехгранный угол в плоскости грани A_2OB_2 на 180°; тогда ребро OA_2, вследствие равенства углов A_2OB_2 и AOB, совместится с ребром OB и ребро OB_2 — с ребром OA, ребро же OC_2 займет положение OC_3; оно не может совпасть с ребром OC, так как двугранные углы трехгранных углов не равны.

Итак, ни при одном, ни при другом совмещении трехгранные углы не равны, другими же способами совместить их нельзя. Следовательно, симметричные трехгранные углы с неравными плоскими углами несовместимы, т. е. неконгруентны. Если бы в одном из двух симметричных трехгранных углов, например $OABC$, плоские углы AOC и BOC были

равны (такие трехгранные углы можно назвать равнобедренными), то и угол A_1OC_1 был бы равен углу B_1OC_1, и трехгранный угол $OABC_2$ совместился бы с трехгранным углом $OABC$, так как грани AOC и BOC образуют с плоскостью грани OAB те же углы, что и грани AOC_2 и BOC_2.

Понятно, что два правильных симметричных трехгранных угла конгруентны, так как плоские углы их равны, равны и двугранные углы их.

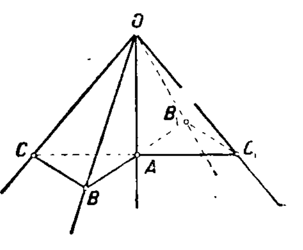


Рис. 214.

Рассмотренные трехгранные углы симметричны относительно общей их вершины O (рис. 212 и 213); трехгранные углы могут быть симметричны относительно общего их ребра или относительно какой-либо прямой — оси симметрии. Так, на рис. 214 даны два трехгранных угла $OABC$ и OAB_1C_1, симметричные относительно ребра OA. Такие трехгранные углы конгруентны, так как один из них представляет собой лишь иное положение другого в пространстве. Построение таких трехгранных углов видно из рис. 214. На рисунке плоскость ABC перпендикулярна к ребру OA и треугольник AB_1C_1 — фигура, симметричная треугольнику ABC. Центрально-симметричные треугольники ABC и AB_1C_1 всегда совместимы, поэтому совместимы и трехгранные углы, сечениями которых они служат.

§ 44. Симметричные многогранники.

1. Два многогранника конгруентны, если они при вложении совпадают всеми своими соответственными элементами: вершинами, ребрами, плоскими и двугранными углами. В конгруентных многогранниках ребра, плоские и двугранные углы расположены в одном и том же порядке.

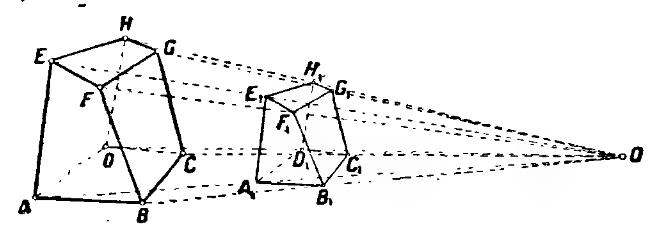


Рис. 215.

Если ребра, плоские и двугранные углы двух многогранников равны, но расположены в „обратном" порядке, то они только симметричны и, вообще говоря, не конгруентны.

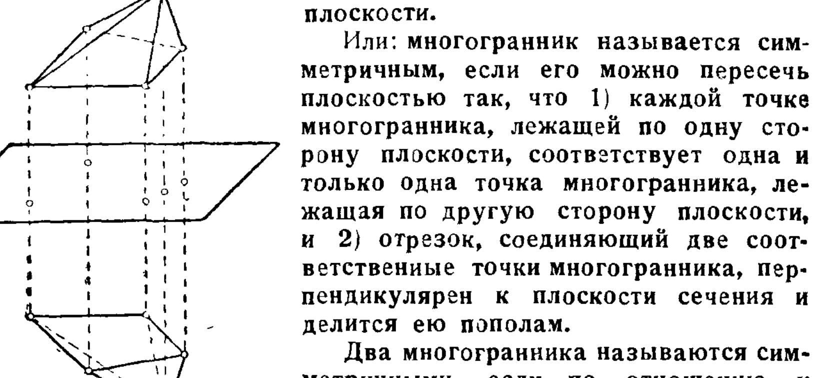
Пусть дан какой-нибудь многогранник $ABCDEFGH$ и вне его произвольная точка O (рис. 215). Если соединить точку O со всеми вершинами многогранника и взять, положим, где-либо на луче OA точку A_1 и провести через нее прямую $A_1B_1 \parallel AB$ до пересечения с лучом OB в точке B_1, затем прямую $B_1C_1 \parallel BC$ до пересечения с лучом OC в точке C_1 и так далее, то учащиеся, уже знакомые с соответствующими

построениями в планиметрии, придут к заключению, что получившийся таким построением многогранник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ должен быть подобен данному.

В самом деле, соответственные ребра многогранников пропорциональны, соответственные плоские углы граней равны как углы с взаимно параллельными сторонами, а потому равны и все их трехгранные углы, и, следовательно, многогранники подобны. Итак:

Если ребра двух многогранников параллельны и прямые, проходящие через соответственные их вершины, сходятся в одной точке, то такие многогранники называются подобными и подобно расположенными.

2. Многогранник называется симметричным относительно плоскости, если его можно пересечь плоскостью так, что одна часть многогранника, лежащая по одну сторону секущей плоскости, является зеркальным изображением другой части многогранника, лежащей по другую сторону секущей плоскости.


Рис. 216.

Или: **многогранник называется симметричным, если его можно пересечь плоскостью так, что 1) каждой точке многогранника, лежащей по одну сторону плоскости, соответствует одна и только одна точка многогранника, лежащая по другую сторону плоскости, и 2) отрезок, соединяющий две соответственные точки многогранника, перпендикулярен к плоскости сечения и делится ею пополам.**

Два многогранника называются симметричными, если по отношению к какой-нибудь плоскости они удовлетворяют тем же условиям, каким удовлетворяет относительно секущей плоскости симметричный многогранник. Плоскость эта называется плоскостью симметрии (рис. 216).

Чтобы построить многогранник, симметричный данному относительно какой-либо плоскости, следует из всех вершин данного многогранника провести перпендикуляры к выбранной плоскости, плоскости симметрии, и продолжить их по другую сторону на такое же расстояние, а затем соединить концевые точки построенных отрезков в том порядке, в каком они соединены в заданном многограннике. Построенный таким способом многогранник симметричен данному.

Имеются многогранники, у которых одна, две, три и более плоскостей симметрии.

Одну плоскость симметрии имеют: пирамида, в основании которой лежит фигура, имеющая только одну ось симметрии, и при этом вершина пирамиды проектируется в какую-либо точку, лежащую на оси симметрии основания; усеченная пирамида, у которой оба основания имеют по одной оси симметрии и плоскость, проходящая через них, перпендикулярна к основаниям; все прямые призмы, основания которых не имеют осей симметрии.

Две плоскости симметрии имеют: пирамида и соответствующая ей усеченная пирамида, основания которых имеют по две оси симметрии и перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания, проходит через точку пересечения осей симметрии основания; прямые призмы, основания которых имеют одну ось симметрии.

Три плоскости симметрии имеют: пирамиды с тремя осями симметрии в основании, если при этом перпендикуляр, проведенный из вершины на плоскость основания, проходит через точку пересечения осей симметрии основания; прямые призмы, основания которых имеют две оси симметрии: такими телами являются кирпич, прямоугольный ящик с неравными ребрами и т. д.

Четыре плоскости симметрии имеют: пирамиды, основания которых имеют четыре оси симметрии и перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания, проходит через точку пересечения осей симметрии основания; прямые призмы, основания которых имеют три оси симметрии.

Пять плоскостей симметрии имеют, например, правильные пятиугольные полные и усеченные пирамиды, правильные четырехугольные призмы.

Шесть плоскостей симметрии имеют, например, правильные шестиугольные полные и усеченные пирамиды и правильные пятиугольные призмы и т. д.

§ 45. Правильные многогранники.

1. Напомнив учащимся о соответствии пирамид и треугольников, многогранников (полиэдров) и многоугольников (полигонов), можно рассмотреть вопрос о соответствии между правильными многогранниками и правильными многоугольниками. Правильными многогранниками называются многогранники, все ребра, грани и многогранные углы которых равны; аналогично правильными называются такие многоугольники, все стороны и углы которых равны. Из планиметрии учащимся известно, что правильных многоугольников может быть очень много, бесконечно много, и они будут поражены, когда узнают, что число правильных многогранников ограничено и их всего пять.

Не лишне рассмотреть с учащимися, какими правильными одноименными многоугольниками можно покрыть плоскость без просветов; это можно сделать, используя только три многоугольника, а именно — правильные треугольники, правильные четырехугольники и правильные шестиугольники: шесть правильных треугольников или четыре правильных четырехугольника-квадрата или три правильных шестиугольника, приложенные друг к другу так, что вершины их совпадают и они при этом не покрывают друг друга, заполняют собою всю область вокруг общей вершины. Только такими правильными одноименными многоугольными плитами можно покрыть пол.

2. Приступая к образованию правильных многогранников, ограниченных только правильными треугольниками, учащиеся должны уяснить себе, что для образования из правильных треугольников многогранного угла нельзя использовать шесть правильных треугольников, так как сумма всех плоских углов при вершине многогранного угла, составленного из шести правильных треугольников, была бы равна 360°, ибо $60° \cdot 6 = 360°$, что невозможно, так как сумма всех плоских углов при вершине многогран-

ного угла всегда меньше 360°. Отсюда вывод, что число правильных треугольников, с помощью которых можно образовать правильный многогранный угол, не может быть больше пяти. Принимая одновременно во внимание, что число граней многогранного угла не может быть меньше трех, надлежит сделать вывод, что многогранный угол может быть образован только из трех, четырех и пяти правильных треугольников. Итак, правильных многогранников, гранями которых служат правильные треугольники, существует всего три вида. Разбор отдельных видов многогранников следует начинать с простейшего случая, а именно — со случая, когда правильный трехгранный угол образован тремя правильными треугольниками. Если такой трехгранный угол образован (лучше всего взять три равных правильных картонных треугольника), учащиеся непосредственно убеждаются в том, что для получения ограниченного со всех сторон тела необходимо и достаточно использовать еще четвертый правильный треугольник и притом равный данным, чтобы получить правильный многогранник. Такой многогранник по числу граней называется правильным тетраэдром (тетра — четыре, эдрон — грань) или правильным четырехгранником. Он одинаково расположен как относительно каждой из своих четырех граней, так и относительно каждого из своих шести ребер и каждого из своих четырех трехгранных углов (рис. 217).

Рис. 217.

Учащимся может быть предложена характерная задача: составить из шести палочек, одинаковых по длине, четыре треугольника, сторонами которых служили бы данные шесть палочек. Учащиеся, особенно, если этот вопрос будет задан до того, как они всесторонне ознакомились с правильным тетраэдром, обычно полагают, что подлежащие построению треугольники лежат в одной плоскости, и крайне озабочены невозможностью решить задачу, так как на плоскости нельзя составить из шести палочек не только четырех треугольников, но даже и трех. А между тем, обращаясь к пространству, можно образовать правильный тетраэдр; таким образом пространственная фигура вполне решает вопрос: из шести палочек-ребер образован правильный тетраэдр, ограниченный четырьмя правильными треугольниками.

Из всех многогранников тетраэдр — самый простой пространственный образ. Нужно отметить, что противолежащие вершины тетраэдра не симметричны относительно каких-либо плоскостей, также не симметричны противолежащие ребра; последние ортогональны относительно друг друга. Плоскостями симметрии тетраэдра являются три плоскости, проходящие через вершину S и высоты основания.

Свойства правильного тетраэдра — правильной треугольной пирамиды, все ребра которой равны, — были ранее рассмотрены; они во многом напоминают свойства правильного треугольника.

3. После подробного рассмотрения правильного тетраэдра следует перейти к следующему правильному многограннику. Если образовать из четырех правильных треугольников правильный четырехгранный угол, то учащиеся непосредственно убедятся, что, замкнув этот угол плоскостью, они получат правильную четырехугольную пирамиду, которая не является правильным многогранником, хотя все ребра ее и равны, и что многогранные углы такой пирамиды не одноименны: один из углов имеет четыре

грани, остальные же четыре угла имеют по три грани. Если же приложить к полученной таким построением пирамиде такую же четырехугольную пирамиду так, чтобы совпали основания обеих пирамид, а затем изъять оба основания, то получится многогранник, одинаково расположенный относительно каждой из его шести вершин; это — правильный октаэдр (окто — восемь) или правильный восьмигранник (рис. 218). Он ограничен восемью гранями и имеет 12 ребер. Каждой вершине, а следовательно, и каждому четырехгранному углу противолежит вершина и равный ему четырехгранный угол, каждому ребру противолежит ребро, ему параллельное, и каждой грани — грань, ей параллельная.

Интересно показать связь между октаэдром и тетраэдром. Так, если продолжить две противолежащие грани в одной половине октаэдра — в одной четырехугольной пирамиде, а затем две противолежащие грани, в другой четырехугольной пирамиде, до взаимного пересечения граней, то получаемый таким построением пространственный образ есть тетраэдр (рис. 219). Для показа этой связи надлежит использовать геометрический ящик.

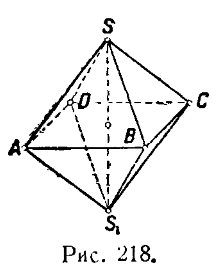


Рис. 218.

Рис. 219.

4. Надо отметить, что развитию пространственных представлений способствует решение вопроса о том, в каком порядке следует расположить на плоскости правильные треугольники, чтобы стороны их попарно совпадали и представляли собой развертку замкнутой пространственной фигуры.

Так, например, тетраэдр образован четырьмя равными правильными треугольниками, и на плоскости можно расположить их согласно указанному выше условию лишь следующими тремя способами, как указано

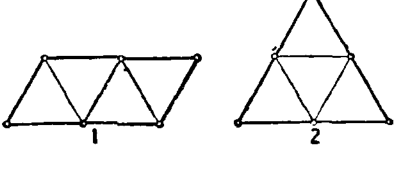
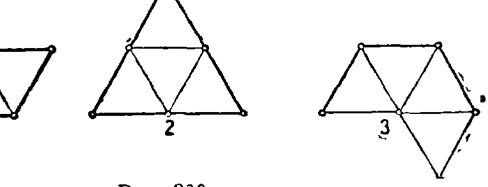



Рис. 220

на рис. 220—1, 2, 3. Следует дать учащимся четыре правильных картонных треугольника и предложить составить развертку тетраэдра или его сетку (Netz, по выражению немецких методистов). Если такие выкройки разверток изготовлены учащимися из бумаги или картона, то, слегка надрезав развертку по общим сторонам, отмеченным на развертке пунктиром, учащиеся путем проб убеждаются, что только первые две (1 и 2) выкройки удовлетворяют условию и служат развертками тетраэдра.

Необходимо затем исследовать, почему третья выкройка не может служить разверткой тетраэдра. Причина ясна: в этой выкройке в одной вершине „сходятся“ четыре треугольника, между тем у тетраэдра имеются только трехгранные углы.

Если такой же вопрос предложить относительно октаэдра, то из восьми его треугольников-граней можно составить не меньше тринадцати различных фигур; их изображения даны на рис. 221. Из указанных фигур только фигуры 6, 9 и 10 могут служить развертками октаэдра; фигуры 1, 2, 3, 4, 5 и 7 приводятся для показа возможных расположений треугольников, не дающих разверток октаэдра. Фигуры 8, 11, 12 и 13 также не могут служить развертками, так как в них пять треугольников сходятся в одной точке, у октаэдра же имеются лишь четырехгранные углы.

Можно поступать и иначе, а именно — использовать готовый многогранник, склеенный, положим, из картона; он разрезается по ребрам так, чтобы можно было получить развертку тела. Можно, например, разрезать поверхность тетраэдра по трем ребрам, выходящим из одной вершины

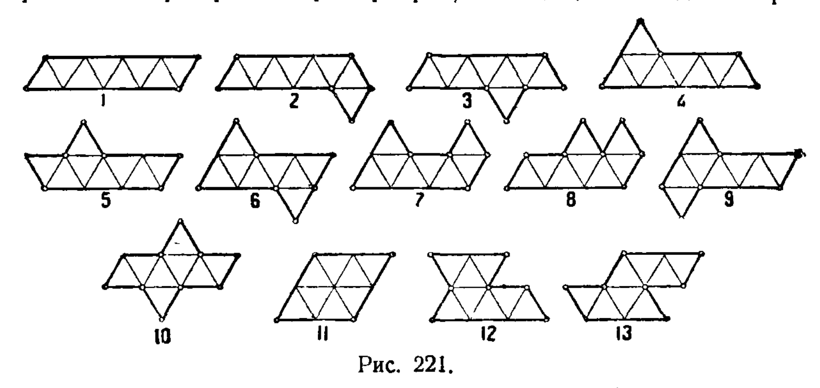


Рис. 221.

или разрезать только по двум из них и еще по одному ребру, которое с первыми двумя ребрами тетраэдра не образует треугольника, ибо в таком случае будет отрезана одна грань. Разрезать поверхность тетраэдра для получения развертки в ином порядке, кроме указанного выше, нельзя.

Если исходить из тех же соображений, то для получения развертки правильного октаэдра следует разрезать его поверхность по четырем ребрам; при этом имеются только три возможности, соответствующие приведенным выше фигурам.

5. Рассмотрим правильный многогранник, многогранные углы которого составлены из пяти правильных треугольников. Сложив один такой пятигранный угол и проведя через основания треугольников плоскость, получим правильную пятиугольную пирамиду. Если составить еще одну такую же пирамиду и приложить ее к первой так, чтобы их основания совпали, то не получится правильного многогранника, так как в этом многограннике будут только два пятигранных угла, остальные же углы будут четырехгранные. Чтобы получить правильный многогранник, нужно две пятиугольные пирамиды, удалив их основания, связать поясом из десяти правильных треугольников так, чтобы пять из них совпали своими основаниями с пятью сторонами основания одной пирамиды, другие пять —

со сторонами основания другой пирамиды (рис. 222). Такой многогранник, ограниченный двадцатью правильными треугольниками, называется правильным икосаэдром (икоси — двадцать) или правильным двадцатигранником В нем 30 ребер — по 10 ребер у каждой из двух пирамид и 10 ребер у пояса, состоящего из 10 треугольников. Подсчет числа ребер можно произвести и так: многогранник ограничен двадцатью треугольниками, следовательно, общее число их сторон равно 60, но каждая из сторон одного треугольника совпадает с одной из сторон другого треугольника, а потому общее число ребер многогранника равно 30.

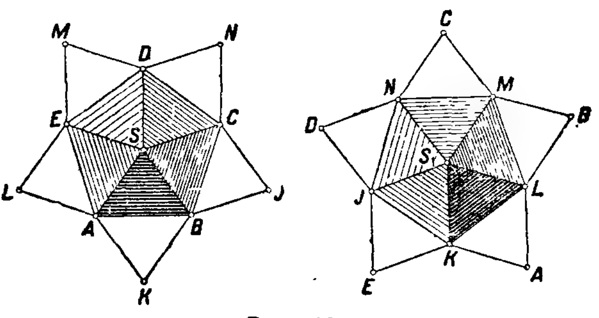


Рис. 222.

Рис. 223.

У этого многогранника 12 вершин, по 6 вершин у каждой пирамиды; подсчет может быть выполнен и так: у всех треугольников $20 \cdot 3 = 60$ вершин, но каждые 5 вершин треугольников сливаются в одну, а потому у многогранника 12 вершин.

6. Исчерпав, таким образом, правильные многогранники, гранями которых могут служить правильные треугольники, переходят к рассмотрению таких многогранников, гранями которых могут служить правильные четырехугольники — квадраты. Нетрудно убедиться, что из правильных четырехугольников — квадратов можно составить многогранник только одного вида. Действительно, 4 квадрата, расположенные своими вершинами вокруг одной точки, заполняют полностью всю область вокруг этой точки, а потому нельзя составить из 4 квадратов многогранный угол; однако, нельзя взять и меньше трех квадратов, и, следовательно, существует только один правильный многогранник, грани которого — квадраты. Рассуждения привели нас к образованию куба, или правильного гексаэдра (гекс — шесть), имеющего шесть граней, 12 ребер, 8 вершин.

Интересно рассмотреть вопрос об образовании куба по его развертке или сетке. Как оказывается, из 6 квадратов можно составить 33 фигуры; они даны на рис. 223. Из этих 33 фигур только 11, а именно фигуры 9, 10, 11, 12, 13, 14, 28, 29, 30 и 32, могут служить развертками куба. Остальные фигуры по разным причинам не могут дать модели куба; некоторые, например, потому, что в одной точке сходятся вершины четырех квадратов, что не позволяет образовать многогранный угол.

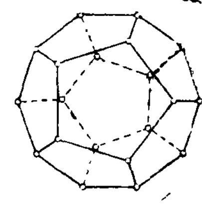


Рис. 224.

Можно поставить вопрос, из скольких отрезков, равных стороне квадрата, составлена каждая из 33 фигур; подсчет дает, что только у одной из них 17 отрезков; у семи, у которых в одной точке сходятся по четыре вершины квадратов, — по 18 отрезков, у остальных 25 — по 19 отрезков.

К четырем рассмотренным правильным многогранникам следует присоединить еще один, гранями которого служат правильные пятиугольники. Это — правильный додекаэдр (додека — двенадцать) или правильный двенадцатигранник (рис. 224). Его развертка дана в стабильном учебнике.

§ 46. Теорема Эйлера

1. Учащимся напоминается, что многогранником называется тело, ограниченное со всех сторон плоскостями — гранями.

Если все грани многогранника расположены только по одну сторону от любой его грани, то такой многогранник называется *выпуклым*. Рассматриваемые в элементарном курсе геометрии призмы и пирамиды являются выпуклыми многогранниками.

Условимся о следующих обозначениях: число ребер многогранника обозначим русской буквой $Р$, число его вершин — буквой $В$, число его граней — буквой $Г$, число же плоских его углов — буквой $У$.

Теорема. **Во всяком многограннике число плоских углов вдвое больше числа его ребер, $У = 2Р$.**

На самом деле, каждая грань многогранника — многоугольник — имеет одинаковое число сторон, которые являются ребрами многогранника, и одинаковое число углов, которые являются плоскими углами многогранника, но каждая сторона многоугольника — грани — является общей стороной — ребром — двух смежных граней, а потому число ребер многогранника вдвое меньше числа плоских углов.

Зависимость между числом ребер P, числом вершин B и числом граней Γ любого выпуклого многогранника определяется формулой: $P = B + \Gamma - 2$. Указанная зависимость установлена Эйлером.

Формула указывает, что **в любом выпуклом многограннике число его ребер на два меньше суммы числа его вершин и числа его граней.**

Заметим, что каждый многогранник можно себе представить составленным из треугольных пирамид, имеющих общую вершину; для этого стоит только разбить диагоналями грани многогранника на треугольники, а затем соединить взятую произвольно внутри многогранника точку со всеми вершинами так полученных треугольников.

Проверкой убеждаемся, что формула справедлива для треугольной пирамиды, у которой $P = 6$, $B = 4$ и $\Gamma = 4$.

Действительно, $P = B + \Gamma - 2$, или $6 = 4 + 4 - 2$.

Для лучшего понимания рассуждений, приводимых при доказательстве этой теоремы, целесообразно иметь модель выпуклого многогранника, разбитого на треугольные пирамиды; это позволяет шаг за шагом следить по модели, к каким результатам приводят отдельные выводы.

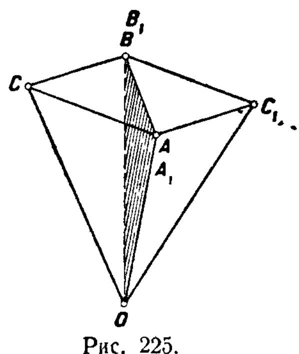


Рис. 225.

Разобьем какой-либо многогранник на треугольные пирамиды и приложим к одной из полученных треугольных пирамид еще одну треугольную пирамиду так, чтобы совпали соответствующие равные их боковые грани. Обе эти грани при этом окажутся „внутри“ многогранника, а потому у тела, составленного из двух треугольных пирамид, число ребер увеличится не на шесть, а лишь на три, так как три ребра второй пирамиды совпадут с тремя ребрами первой; также и число вершин будет больше лишь на одну, так как из четырех вершин второй пирамиды три вершины совпадут с тремя вершинами первой; число же граней увеличится лишь на две (рис. 225): прибавилось три грани, четвертая грань второй пирамиды и одна из граней первой пирамиды остались внутри тела, и они, таким образом, не включаются в счет, так как не являются гранями, ограничивающими вновь полученное тело.

Итак, в равенстве $P = B + \Gamma - 2$ левая часть увеличится на 3, правая та же увеличится на $1 + 2$; убеждаемся, что равенство не нарушено, оно справедливо и для данного случая.

Если затем приложить к телу, составленному из двух треугольных пирамид, еще третью треугольную пирамиду так, чтобы соответствующие равные боковые грани совпали, то число ребер увеличится на три, число вершин — на одну и число граней — на две, и равенство $P = B + \Gamma - 2$ останется также в силе. Следует обратить внимание на то, что в том случае, когда основания двух приложенных друг к другу треугольных пирамид расположены в одной плоскости, число граней уменьшится на единицу, на единицу же уменьшится число ребер, таким образом, и в данном случае равенство $P = B + \Gamma - 2$ не нарушится.

Продолжая рассуждения дальше, мы придем, наконец, к последней из пирамид, на которые разбит многогранник. Если приложить последнюю

треугольную пирамиду, восстанавливающую многогранник, который был разбит на треугольные пирамиды, то число граней с присоединением этой пирамиды уменьшится на две, три из прежних граней, оказавшиеся внутри тела, уже не учитываются, число вершин уменьшится на одну — общая вершина всех четырех пирамид находится теперь внутри тела, и число ребер уменьшится на три, так как три ребра, исходящие из общей вершины пирамид и оказавшиеся внутри тела, уже не учитываются. Равенство $P = B + \Gamma - 2$ справедливо.

Следовательно, формула верна для любого выпуклого многогранника.

Надо указать, что еще до Эйлера (1707—1783) с этой теоремой, повидимому, был знаком Декарт (1593—1662) и что, возможно, о ней знал и Архимед, в связи с предполагаемым его утверждением, что существует всего пять правильных многогранников.

2. Формула Эйлера позволяет решить такого рода вопросы: существуют ли многогранники, все грани которых — одноименные многоугольники и все многогранные углы которых одноименны? Пусть многогранник ограничен только n-гранными углами, т. е. из каждой вершины выходит n ребер. Каждое ребро принадлежит двум граням и каждая грань — m-угольник — имеет m ребер, следовательно,

$$m \cdot \Gamma = 2P \quad \text{и} \quad n \cdot B = 2P,$$

а потому по формуле Эйлера имеем:

$$P = \frac{2P}{n} + \frac{2P}{m} - 2$$

или

$$P \cdot \left(\frac{2}{m} + \frac{2}{n} - 1\right) = 2.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\frac{2}{n} + \frac{2}{m} > 1,$$

n и m не могут быть меньше 3, а потому

$$\frac{2}{n} > \frac{1}{3} \text{ и } \frac{2}{m} > \frac{1}{3}, \text{ откуда } m < 6 \text{ и } n < 6.$$

В самом деле, из неравенства $\frac{2}{n} + \frac{2}{m} > 1$ последовательно имеем:

$$2m + 2n > mn, \text{ откуда } m(n-2) < 2n.$$

Из этого неравенства следует, что при наименьшем значении $n = 3$ имеем: $m(3-2) < 2 \cdot 3$ или $m < 6$, т. е. наибольшее значение для m меньше 6, так что m может принимать значения, равные 3, 4, 5.

Точно так же при наименьшем значении $m = 3$ имеем $3(n-2) < 2n$, или $3n - 6 < 2n$, или $n < 6$, т. е. наибольшее значение для n при заданном условии меньше 6, а потому n может принимать значения, равные 3, 4, 5.

Итак, m и n могут быть равными только 3, 4 или 5.

На основании этого можно составить следующую таблицу:

m	n	P	B	Γ	Название многогранника
3	3	6	4	4	тетраэдр, или четырехгранник
3	4	12	6	8	октаэдр, или восьмигранник
3	5	30	12	20	икосаэдр, или двадцатигранник
4	3	12	8	6	гексаэдр, или шестигранник
5	3	30	20	12	додекаэдр, или двенадцатигранник

Этими многогранниками исчерпываются все возможные выпуклые многогранники с одноименными гранями и одноименными многогранными углами.

3. Следует отметить, что указать учащимся на существование определенной зависимости между числом ребер, числом вершин и числом граней выпуклого многогранника необходимо; умение же доказать теорему Эйлера, конечно, не является для них обязательным. Знание свойства суммы плоских углов при вершине выпуклого многогранного угла, которая меньше $4d$, позволяет затем перейти к правильным многогранникам, т. е. к таким многогранникам, все грани которых — правильные одноименные равные многоугольники и все многогранные углы которых — правильные и равные многогранные углы.

Условию сумма плоских углов многогранного угла меньше $4d$ удовлетворяют:

1) три, четыре и пять правильных треугольников, для которых сумма плоских углов при вершине меньше 360° и соответственно равна $3 \cdot 60° = 180°$; $4 \cdot 60° = 240°$ и $5 \cdot 60° = 300°$; из шести, семи и т. д. правильных треугольников нельзя образовать правильный многогранный угол;

2) три правильных четырехугольника, так как сумма их плоских углов при вершине равна $3 \cdot 90° = 270°$, т. е. меньше 360°; из четырех, пяти и т. д. правильных четырехугольников нельзя образовать многогранный угол;

3) три правильных пятиугольника, так как сумма их плоских углов при вершине равна $3 \cdot 108° = 324°$, т. е. меньше $4d$; из четырех или более правильных пятиугольников нельзя образовать правильный многогранный угол.

Также нельзя образовать правильный многогранник из правильных многоугольников, число сторон которых равно 6 и больше.

Число ребер, вершин и граней правильных выпуклых многогранников определяется по формуле Эйлера.

Задача. Найти число ребер, вершин и граней многогранника, каждый многогранный угол которого образован тремя правильными треугольниками.

Число плоских углов многогранника вдвое больше числа его ребер, $У=2Р$ следовательно, $Р=\frac{У}{2}$; но число плоских углов многогранника втрое больше числа его вершин, $У=3В$, а потому $В=\frac{У}{3}$. Наконец, число плоских углов многогранника втрое больше числа его граней, $У=3Г$, а потому $Г=\frac{У}{3}$.

Подставляя полученные для $Р$, $В$ и $Г$ значения, выраженные через $У$, в формулу Эйлера, имеем: $\frac{У}{2}=\frac{У}{3}+\frac{У}{3}-2$ и находим, что $У=12$, а потому $Р=6$, $В=4$ и $Г=4$. (1)

Итак, правильный многогранник, каждый многогранный угол которого — трехгранный, образуемый правильными треугольниками, имеет четыре грани; такой многогранник, как известно, называется правильным четырехгранником, или правильным тетраэдром.

Если каждый многогранный угол многогранника образован четырьмя правильными четырехугольниками, то $У=2Р$; $У=4В$; $У=3Г$; согласно формуле Эйлера имеем: $\frac{У}{2}=\frac{У}{4}+\frac{У}{3}-2$, откуда $У=24$, а потому $Р=12$; $В=6$ и $Г=8$. (2)

Это — правильный восьмигранник, или правильный октаэдр.

Если каждый многогранный угол многогранника образован пятью правильными треугольниками, то $У=2Р$, $У=5В$ и $У=3Г$; согласно формуле Эйлера: $\frac{У}{2}=\frac{У}{5}+\frac{У}{3}-2$, откуда $У=60$, а потому $Р=30$, $В=12$ и $Г=20$. (3)

Это правильный двадцатигранник, или правильный икосаэдр.

Если каждый многогранный угол многогранника образован тремя правильными четырехугольниками, то $У=2Р$, $У=3В$ и $У=4Г$, и согласно формуле Эйлера: $\frac{У}{2}=\frac{У}{3}+\frac{У}{4}-2$, откуда $У=24$ и $Р=12$, $В=8$ и $Г=6$. (4)

Это — правильный шестигранник — куб, или правильный гексаэдр.

Если каждый многогранный угол многогранника образован тремя правильными пятиугольниками, то $У=2Р$, $У=3В$ и $У=5Г$; согласно формуле Эйлера: $\frac{У}{2}=\frac{У}{3}+\frac{У}{5}-2$, откуда $У=60$ и $Р=20$, $В=20$ и $Г=12$. (5)

Это - правильный двенадцатигранник, или правильный додекаэдр.

4. При рассмотрении правильных многогранников необходимо использовать каркасные модели правильных многогранников; без показа моделей учащимся трудно представить себе четко эти тела, особенно двенадцати- и двадцатигранники.

В результате разбора образования правильных многогранников учащиеся должны иметь четкое представление о том, что в каждом правильном многограннике, кроме двугранных углов, могут быть только одноименные многогранные углы; так, в правильном тетраэдре, как и в гексаэдре и додекаэдре, кроме двугранных углов, имеются только трехгранные углы; в октаэдре, кроме двугранных углов, имеются только четырехгранные углы, трехгранных углов в нем нет; в икосаэдре, кроме двугранных углов, имеются только правильные пятигранные углы, в нем нет ни правильных трехгранных, ни правильных четырехгранных углов.

§ 47. Построение изображений правильных многогранников.

1. Указания, как следует выполнять построение правильных тетраэдра, гексаэдра и октаэдра, были уже даны. Приводим ниже, как еще можно

построить правильный октаэдр. Если построить три попарно взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в одной точке, в точке O (рис. 226), отложить от точки O по обе стороны от нее равные отрезки и соединить концы этих отрезков, то получится правильный октаэдр. Прямые AA_1 и BB_1 взяты на рисунке в плоскости чертежа, а прямая CC_1 проведена перпендикулярно к плоскости, определяемой прямыми AA_1 и BB_1, поэтому она уменьшена вдвое, так как $k = 1:2$, и образует при угле сокращения $\varphi = 45°$ с прямою AA_1 угол в 45°. Все ребра октаэдра равны как гипотенузы равных прямоугольных треугольников, а потому все грани — правильные треугольники.

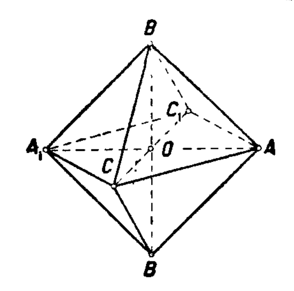
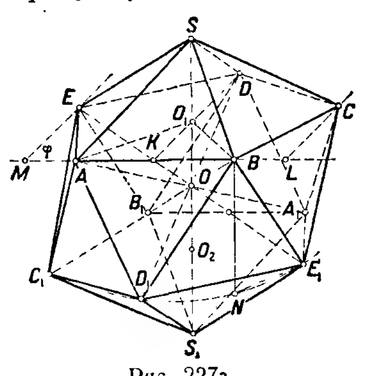
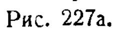


Рис. 226.

2. Построение правильных двадцатигранника и двенадцатигранника более сложно, а потому особо останавливаться на этом с учащимися в классе не следует; показ и выполнение такого построения можно отнести к кружковой работе.

3. При построении правильного двадцатигранника по данному его ребру a полезно предварительно рассмотреть готовый чертеж или еще лучше каркасную модель двадцатигранника. Подробный разбор должен показать, что каждая вершина двадцатигранника вершина правильного пятигранного угла. Если мысленно провести плоскость через концы ребер, выходящих из одной вершины, то она отсечет от двадцатигранника правильную пятиугольную пирамиду, все ребра которой равны (рис. 227а); высота такой пирамиды SO_1 есть катет прямоугольного треугольника SAO_1, гипотенуза которого SA равна a, ребру двадцатигранника, а катет AO_1 — радиусу описанной около пятиугольника основания окружно-




Рис. 227а.

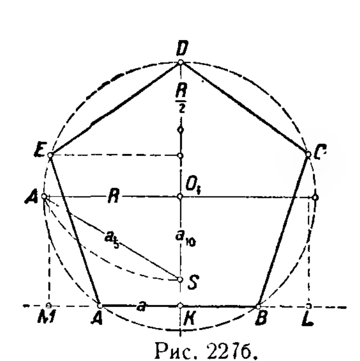


Рис. 227б.

сти. Следовательно, построив правильный пятиугольник по данной его стороне (рис. 227б; см. ч. I) и найдя радиус описанной около него окружности, найдем построением отрезок SO_1, катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого $= a_5$ и другой катет $= R$. Из рисунка видно, что $SO_1 = a_{10}$,— стороне правильного вписанного десятиугольника. Расстояние между плоскостями пятиугольников $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ — перпендикуляр BN — находится из прямоугольного треугольника BNE_1 по гипотенузе $BE_1 = a$ и катету NE_1, равному стороне

правильного вписанного десятиугольника. Из первоначального рассмотрения правильного двадцатигранника и модели его видно, что плоскости пятиугольников $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ параллельны, и высоты обеих пирамид, проходящие через центры оснований, лежат на одной прямой, соединяющей противолежащие вершины пирамид $SABCDE$ и $S_1A_1B_1C_1D_1E_1$. Окружности, описанные около каждого из пятиугольников оснований пирамид, равны, а потому точка B, вершина пятиугольника, проектируется на окружность, описанную около пятиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$. Отрезки BE_1 и BD_1 — равные наклонные, следовательно, равны и их проекции, $NE_1 = ND_1$, и, таким образом, $NE_1 = ND_1 = a_{10}$ — стороне правильного вписанного десятиугольника; BN — катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна a_5, а другой катет a_{10}. Из рисунка видно, что $BN = O_1O_2 = R$ — радиусу описанной около правильного пятиугольника окружности. Итак, можно построить отрезок SO_1 и отрезок BN, равный O_1O_2, следовательно, можно построить и сумму этих отрезков — отрезок SO_2, так как $SO_1 + BN = SO_1 + O_1O_2 = SO_2$. Что касается отрезка O_2S_1, равного высоте пятиугольной пирамиды $S_1A_1B_1C_1D_1E_1$, то он равен высоте SO_1 пятиугольной пирамиды $SABCDE$, $O_2S_1 = SO_1$; сумма же отрезков SO_1, O_1O_2 и O_2S_1 дает длину оси SS_1 правильного двадцатигранника. Осями многогранника являются также прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 и EE_1. Построив правильную пятиугольную пирамиду $SABCDE$, ее высоту SO_1 и продолжив эту высоту SO_1 на расстояние, равное $O_1O_2 + O_2S_1$, находим отрезок SS_1, затем находим его середину O, проводим из вершин A, B, C, D и E через точку O прямые и отмечаем на них точки A_1, B_1, C_1, D_1 и E_1; эти точки, симметричные точкам A, B, C, D и E, служат вершинами пятиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$ — основания пирамиды, вершиной которой является точка S_1. Соединив, наконец, вершины оснований двух пятиугольных пирамид в последовательном порядке, а именно: точку A с точками C_1 и D_1, B с D_1 и E_1, C с E_1 и A_1, D с A_1 и B_1 и точку E с точками B_1 и C_1, получим искомое изображение правильного двадцатигранника.

Задача, таким образом, сводится к построению правильной пятиугольной пирамиды, все ребра которой равны a. Предварительно строим ее основание (рис. 227б), а затем отрезок AA_1, равный SO — высоте пирамиды, и отрезок AN, равный O_1O_2 — расстоянию между параллельными сечениями. Точка O одинаково удалена от всех вершин правильного двадцатигранника, и это расстояние $OS = SO_1 + OO_1 = = a_{10} + \frac{1}{2}R = R\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{R}{2} = \frac{R\sqrt{5}}{2}$, где R — радиус окружности, описанной около правильного пятиугольника со стороной $a = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ (ч. I, стр. 274), откуда $R = \frac{2a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$, а потому

$$OS = \frac{2a\sqrt{5}}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \frac{a\sqrt{5}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{80}} = \frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Двадцатигранник может быть разбит на двадцать равных правильных треугольных пирамид с общим центром в точке O и со стороной основания, равной a. Высота такой пирамиды вычисляется обычным путем. Возьмем, например, пирамиду $OBCS$. Строим ее изображение, при этом

расположим основание так, чтобы высота его SM была параллельна вертикальной плоскости чертежа, тогда ребро OS вычерчивается в действительную величину.

Расстояние ON от центра до грани находится из треугольника ONS, где $OS=\frac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ и $SN=\frac{2}{3}SM=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; следовательно,

$$ON=\sqrt{\frac{a^2(10+2\sqrt{5})}{16}-\frac{3a^2}{9}}=\frac{a}{12}\sqrt{90+18\sqrt{5}-48}=\frac{a}{12}\sqrt{42+18\sqrt{5}}=$$
$$=\frac{a\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5}).$$

Последнее преобразование основано на преобразовании сложного радикала по формуле:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+m}{2}}+\sqrt{\frac{A-m}{2}},\text{ где } m=\sqrt{A^2-B}.$$

4. Более сложно выполняется построение изображения правильного двенадцатигранника по данному его ребру a. Следует предварительно рассмотреть каркасную модель или готовый чертеж двенадцатигранника и обратить внимание на два пятиугольника, ABC_2CD_2 и ABB_2DA_2, имеющих общую сторону AB (рис. 228а). Если провести в них диагонали D_2C_2 и A_2B_2, параллельные стороне AB (в правильном пятиугольнике меньшая диагональ параллельна стороне его), а в смежных с ними пятиугольниках BC_2EFB_2

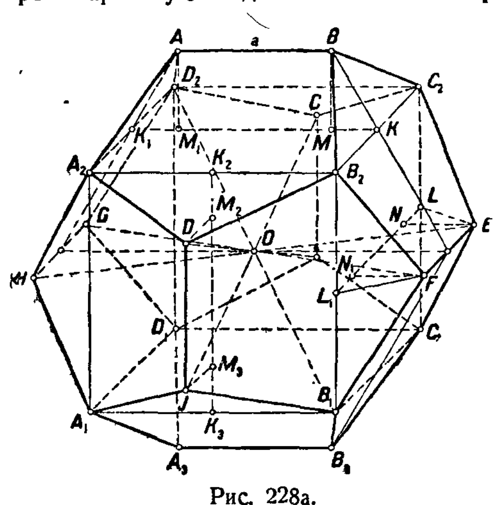


Рис. 228а.

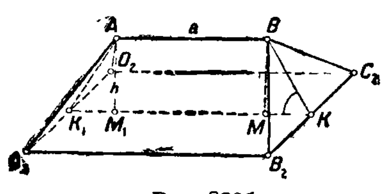


Рис. 228б.

и AA_2HGD_2 диагонали B_2C_2 и A_2D_2, то получится четырехугольник, у которого все стороны равны и противолежащие стороны параллельны, т. е. ромб. Если затем соединить вершину B (рис. 228а) с серединой K диагонали B_2C_2 и вершину A с серединой K_1 диагонали A_2D_2, то $BK\perp B_2C_2$ и $AK_1\perp A_2D_2$, ибо треугольники B_2BC_2 и A_2AD_2 — равнобедренные и равные треугольники. Проведем еще AM_1 и BM перпендикулярно к плоскости четырехугольника $A_2B_2C_2D_2$, тогда $MC_2=$ $=MB_2$, а потому $MK\perp B_2C_2$ и $M_1K_1\perp A_2D_2$, и, следовательно, KK_1, средняя линия $A_2B_2C_2D_2$, перпендикулярна к сторонам A_2D_2 и B_2C_2, а потому четырехугольник $A_2B_2C_2D_2$ — квадрат. Также и четырехугольники $B_1C_1C_2B_2$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_1D_1D_2A_2$, $D_1C_1C_2D_2$ и $A_1B_1B_2A_2$ — квадраты,

а потому $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ — куб. На каждой грани куба (вне его) построена непараллельно усеченная треугольная призма в виде крыши (рис. 228б).

Следует заметить, что каждое ребро рассмотренного куба равно диагонали D_2C_2 правильного пятиугольника, отрезок $MK = M_1K_1 = = \frac{1}{2}(D_2C_2 - a)$, а потому высота BM — катет прямоугольного треугольника BMK, который может быть построен по гипотенузе BK и катету $MK = \frac{D_2C_2 - a}{2}$ (рис. 228б).

Вычислим ребро куба; оно равно диагонали D_2C_2 правильного пятиугольника, т. е. $2a\cos 36°$. Вычислим также высоту $BM = h$, которая, как увидим, равна половине длины ребра двадцатигранника. Высоту $BM = h$ находим из треугольника BMK. Катет $MK = \frac{2a\cos 36° - a}{2}$, гипотенуза BK определяется из треугольника BKB_2, а именно: $BK = a\sin 36°$; наконец, имеем:

$$h^2 = a^2\sin^2 36° - \frac{a^2}{4}(2\cos 36° - 1)^2 =$$
$$= \frac{a^2}{4}(4\sin^2 36° - 4\cos^2 36° + 4\cos 36° - 1) =$$
$$= \frac{a^2}{4}[4(\sin^2 36° - \cos^2 36°) - 4(1 - \cos 36°) + 3] =$$
$$= \frac{a^2}{4}(3 - 4\sin 18° - 8\sin^2 18°).$$

Но $\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$, а потому

$$h^2 = \frac{a^2}{4}[3 - \sqrt{5} + 1 - \frac{1}{2}(6 - 2\sqrt{5})] =$$
$$= \frac{a^2}{4}(3 - \sqrt{5} + 1 - 3 + \sqrt{5}) = \frac{a^2}{4}$$

и $h = \frac{a}{2}$, т. е высота h равна половине длины ребра многогранника.

После этого построение может быть выполнено в следующем порядке. Строим куб, ребро которого равно диагонали правильного пятиугольника со стороной a, т. е. $2a\cos 36° = D_2C_2$. Затем проводим среднюю линию KK_1 верхней грани $A_2B_2C_2D_2$ куба и откладываем на ней от точек K и K_1 отрезки KM и K_1M_1, каждый из которых равен $\frac{D_2C_2 - a}{2}$, строим отрезки MB и M_1A перпендикулярно к KK_1, при этом $MB = M_1A = \frac{a}{2}$, и получаем ребро AB многогранника и ребра BC_2, BB_2, AA_2 и AD_2; такое же построение проводим на нижней грани куба и на всех остальных боковых его гранях.

Достаточно построить непараллельно усеченные треугольные призмы, положим, на правой и на передней гранях, а затем уже строить точки, симметричные относительно центра куба O. Следует при построении изображения иметь в виду, что отрезки $NL = N_1L_1$ сокращаются в отношении $1:2$, отрезки $NE = N_1F$ берутся в действительную их величину, равную $\frac{a}{2}$; отрезки $K_2M_2 = K_3M_3$ берутся также в действительную вели-

чину, отрезки же M_2D и M_3I сокращаются в отношении $1:2$, каждый из отрезков M_2D и M_3I на рисунке равен $\frac{a}{4}$.

5. Следует рассмотреть с учащимися развертки правильных многогранников; развертки даны в стабильном учебнике. Можно предложить учащимся и самим сделать из плотной бумаги „выкройки" правильных многогранников, а затем склеить некоторые из них.

Расстояние точки O от всех вершин двенадцатигранника равно половине диагонали куба, ребро которого служит диагональю правильного пятиугольника со стороной a. Ребро это вычисляется из равнобедренного треугольника A_2DB_2, в котором $A_2D = DB_2 = a$ и $\angle A_2DB_2 = \frac{180^\circ \cdot 3}{5} = 108^\circ$; ребро куба равно $2a \sin 54^\circ$ или $2a \cos 36^\circ$, следовательно, диагональ куба равна $2a\sqrt{3}\cos 36^\circ$, а половина этой диагонали равна $a\sqrt{3}\cos 36^\circ$.

Что касается расстояния точки O от грани двадцатигранника, то оно равно высоте правильной пятиугольной пирамиды, сторона основания которой a, а боковое ребро $a\sqrt{3}\cos 36^\circ$. Радиус описанной около правильного пятиугольника окружности получается из равенства $a = 2R\sin 18^\circ$, откуда $R = \frac{a}{2\sin 18^\circ}$, а потому высота пирамиды

$$H = \sqrt{(a\sqrt{3}\cos 36^\circ)^2 - \left(\frac{a}{2\sin 18}\right)^2} = \sqrt{3a^2\cos^2 36^\circ - \frac{a^2}{4\sin^2 18^\circ}} =$$
$$= \frac{a}{2\sin 18^\circ}\sqrt{12\cos^2 36^\circ \sin^2 18^\circ - 1}.$$

Вычисление двугранных углов правильных многогранников, как и вообще все вычисления с помощью тригонометрии, могут быть отнесены к урокам тригонометрии.

6. Можно доказать, что **внутри каждого из пяти правильных многогранников имеется точка, равно удаленная как от всех его вершин, так и от всех его граней; точка эта называется центром правильного многогранника.**

Действительно, если провести в правильном многограннике перпендикуляры к двум смежным его граням через их середины, то эти перпендикуляры лежат в плоскости линейного угла двугранного угла, образуемого этими двумя гранями, и пересекаются в одной точке. Пусть это будет точка O; эта точка отстоит на одно и то же расстояние от всех вершин взятых двух граней, а также на одно и то же расстояние от плоскостей граней, в чем можно убедиться из равенства соответственных треугольников. Если соединить точку O с серединой третьей смежной грани, то на основании равенства соответственных треугольников обнаружится, что полученный отрезок перпендикулярен и к этой третьей грани и точка O отстоит от вершин этой третьей грани на такое же расстояние, как и от вершин двух первых граней, и т. д.

Следует сопоставить свойство центра правильных многогранников со свойством центра правильных многоугольников.

Заметим, что любой отрезок, концы которого лежат на поверхности правильного многогранника и который при этом проходит через центр многогранника, делится в центре пополам и называется *диаметром* пра-

вильного многогранника. *Диаметры, концами которых служат* вершины противолежащих углов или центры противолежащих граней или ребер, называются *осями* правильного многогранника.

Надо обратить внимание на три взаимно перпендикулярные оси правильных многогранников; они носят название г л а в н ы х о с е й.

В тетраэдре главные оси проходят через середины противолежащих ребер.

В гексаэдре, или кубе, главные оси проходят через центры противолежащих граней, или через противолежащие вершины.

В октаэдре главные оси проходят через противолежащие вершины.

В додэкаэдре и икосаэдре главные оси проходят через середины трех пар противолежащих параллельных ребер.

7. Остановимся на таблице, в которой приведены данные о числе ребер, вершин и граней правильных многогранников.

Многогранники	*Р*	*В*	*Г*
тетраэдр	6	4	4
гексаэдр	12	8	6
октаэдр	12	6	8
додекаэдр	30	20	12
икосаэдр	30	12	20

Анализ этой таблицы показывает, что у гексаэдра и октаэдра одно и то же число ребер, но у гексаэдра столько вершин, сколько у октаэдра граней, и, наоборот, у гексаэдра столько граней, сколько у октаэдра вершин; аналогичное соотношение имеет место у додекаэдра и икосаэдра. Если центры граней октаэдра принять за вершины другого многогранника, то последний будет кубом. Такие два многогранника называются „взаимными". Взаимными будут также додекаэдр и икосаэдр. Что же касается тетраэдра, то он сам себе *взаимен: центры его граней* служат вершинами другого тетраэдра.

8. При проработке темы „правильные многогранники" следует ограничиваться в классе лишь определением понятия о правильном многограннике, разбором, какие имеются правильные многогранники, какие фигуры являются их гранями, а также построением простейших правильных многогранников — тетраэдра, гексаэдра и октаэдра.

Все то, что относится к расширению и углублению темы, может быть отнесено на проработку в кружках с более сильными учащимися или может быть дано как тема для ученических рефератов. Наиболее четко выполненные учащимися чертежи должны вывешиваться в классе; эти чертежи должны помочь учащимся разобраться, как надо выполнять построение правильных многогранников.

В качестве самостоятельных упражнений можно предложить учащимся 1) вычертить взаимно правильные многогранники, гексаэдр и октаэдр, 2) вычислить площадь граней многогранников, 3) вычислить расстояние от центра многогранника до его вершины и до его граней, 4) проверить теорему Эйлера на знакомых им многогранниках: призмах, пирамидах и т. д.

Задачи и вопросы.

1. Ребро куба — a. Центры граней куба служат вершинами другого многогранника. Какой вид этого многогранника и чему равно его ребро?

2. Ребро правильного октаэдра равно a. Центры граней октаэдра служат вершинами другого многогранника. Какой вид этого многогранника и чему равно его ребро?

3. В правильном додекаэдре найти расстояние его центра от вершин и от граней.

4. Центры граней правильного тетраэдра служат вершинами другого многогранника. Какой вид этого многогранника и чему равно его ребро, если известно, что ребро данного тетраэдра равно a?

5. Вычислить угол, образуемый высотой правильного тетраэдра с ребром тетраэдра.

6. На рис. 229 дано изображение пространственной фигуры, составленной из семи кубов. Почему такая фигура не может быть названа правильной? Сколько квадратов ограничивают ее поверхность? Сколько ребер у фигуры? Сколько вершин или трехгранных углов у этой фигуры?

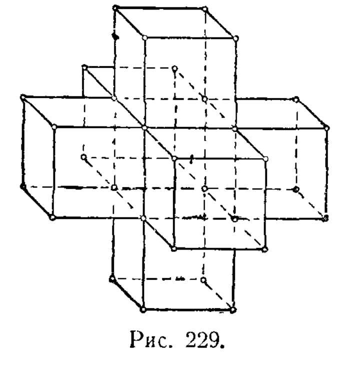


Рис. 229.

7. Все правильные многогранники с одинаковым числом граней подобны. Доказать.

8. В правильном тетраэдре попарно соединены середины всех его шести ребер. Какое при этом получится тело?

Указания к задачам и вопросам.

1. Проектируя ребро построенного многогранника (рис. 230) на плоскость, проходящую через центры боковых граней куба, находим, что проекции их равны, следовательно, равны и ребра многогранника. Тело, полученное указанным в условии задачи построением, — правильный октаэдр. Из треугольника SOA, где $SO=\frac{a}{2}$ и $AO=\frac{a}{2}$, имеем: $AS=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

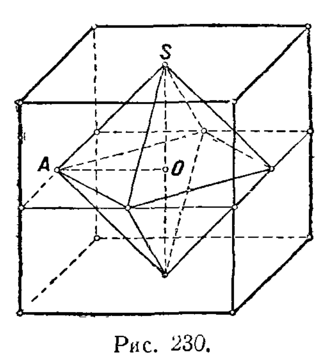


Рис. 230.

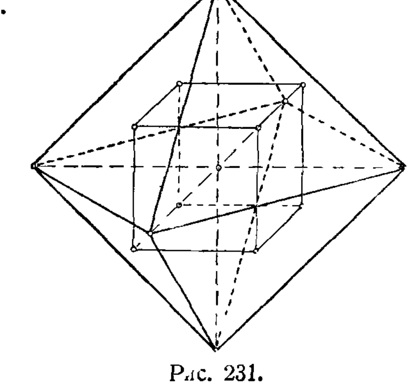


Рис. 231.

2. Ребро вписанного в правильный октаэдр куба (рис. 231) равно $\frac{a\sqrt{2}\cdot 2}{2\cdot 3}=$ $=\frac{a\sqrt{2}}{3}$, где a — ребро октаэдра.

3. Решение данной задачи аналогично уже приведенному решению этого вопроса для двадцатигранника. Расстояние центра от вершины равно $\frac{a\sqrt{3}}{4}(\sqrt{5}+1)$, расстояние центра от граней равно $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$.

4. Вписанный в тетраэдр указанным в условии задачи построением многогранник является также правильным тетраэдром, ребро которого равно $\frac{a}{2}$.

5. Угол между высотой тетраэдра и его ребром, выходящим из той же вершины, что и высота, определяется из прямоугольного треугольника, катет которого $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ и гипотенуза a; $\sin\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{3} : a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и, следовательно,

$$\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Угол между высотой тетраэдра и ребром его основания равен 90°, так как высота и ребро ортогональны.

6. Фигура неправильная, так как не все ее трехгранные углы равны: одни трехгранные углы являются входящими — их 8, другие выходящими — их 24; одни двугранные углы содержат 90°, другие 270°. Фигура не выпуклая.

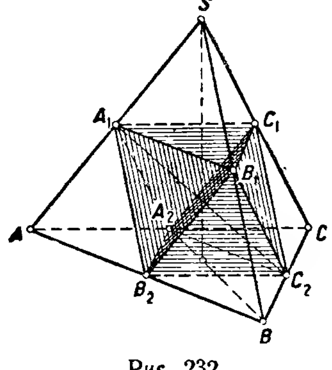


Рис. 232.

Фигура имеет 30 граней: у семи кубов 42 грани, у внутреннего куба 6 граней лежат внутри фигуры, и у каждого из остальных шести кубов наружными являются только 5 граней. Фигура имеет 60 ребер, из них 12 входящих, и 32 вершины.

7. Грани подобны, а потому плоские углы все равны, значит, равны и все многогранные углы.

8. Все ребра тела, полученного указанным в задаче построением, равны, и каждое из них равно половине ребра данного тетраэдра (рис. 232). Тело представляет собой две правильные четырехугольные пирамиды, приложенные друг к другу своими равными основаниями, например $A_2B_2B_1C_1$ или $A_1B_2C_2C_1$ или $A_1A_2C_2C_1$, каждое из которых — квадрат. Прямые A_1C_2, A_2B_1 и B_2C_1 — диагонали или оси полученного правильного восьмигранника или октаэдра, а квадраты $A_2B_2B_1C_1$, $A_1B_2C_2C_1$ и $A_1A_2C_2C_1$ — диагональные сечения или плоскости симметрии; длины диагоналей являются в то же время кратчайшими расстояниями между соответственными скрещивающимися ребрами данного тетраэдра.

ГЛАВА IX.

ПОВЕРХНОСТИ МНОГОГРАННИКОВ.

§ 48. Поверхности призм. Задачи.

1. Вычисление поверхностей прямых и правильных призм, выполняемое на основании известных формул для вычисления площадей многоугольников, не представляет для учащихся каких-либо затруднений; вычисляется площадь отдельных граней многогранника — призмы, затем берется сумма этих площадей, и таким образом находится боковая или полная поверхность многогранника. Так же поступают, когда надо найти боковую поверхность наклонной призмы; отсюда теорема:

Боковая поверхность наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного поперечного сечения на ребро призмы, $S_{бок} = P_{\perp} \cdot l$, где $S_{бок}$ означает боковую поверхность, $P_{\perp}$ — периметр перпендикулярного сечения и l — ребро призмы.

Полезно, чтобы учащиеся, пользуясь моделью наклонной призмы с поперечным сечением, вычертили развертку боковой поверхности какой-

либо наклонной призмы; правильно выполненная работа должна показать им, что в развертке периметр поперечного сечения изображается прямой линией, перпендикулярной к ребрам призмы (рис. 124 стаб. учебн.).

Пример практической задачи на вычисление боковой поверхности наклонной призмы.

В химической лаборатории вытяжной шкап имеет деревянную вытяжную трубу в форме наклонной четырехугольной призмы. Вычислить площадь внутренней поверхности вытяжной трубы, которую требуется покрыть свинцом.

Вытяжная труба — наклонная призма, основания ее ADD_1A_1 и BCC_1B_1 — прямоугольники (рис. 233а); две ее боковые грани, $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$,—прямоугольники, а две другие грани, ABB_1A_1 и DCC_1D_1, — параллелограммы. Пусть длина трубы AB равна l лин. ед., размеры $AD = a = AA_1$ и $\angle A_1AB = \alpha = 60°$. Если на рисунке грани—параллелограмы—начерчены параллельно вертикальной плоскости чертежа, то тем самым дана без сокращения действительная величина сторон этих граней и угла α; понятно, что линейные размеры отрезков взяты в определенном масштабе.

Поперечное сечение $KLMN$, перпендикулярное к ребру AB призмы, перпендикулярно и ко всем ребрам призмы.

Если вычертить развертку внутренней поверхности вытяжной трубы (рис. 233б), то

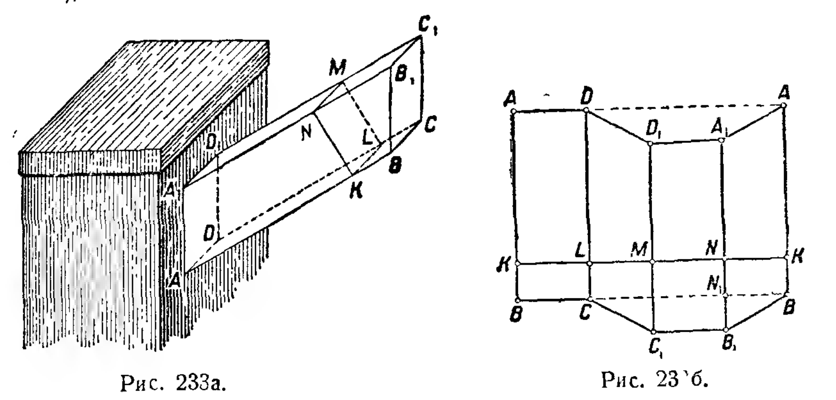


Рис. 233а. Рис. 233б.

1) грань $ABCD$ — прямоугольник, его размеры $AB = DC = l$, $AD = AA_1 = a$; на чертеже отрезок AD сокращен в отношении 1:2;

2) грань DCC_1D_1 — параллелограм со стороной $DC = l$ и $CC_1 = a$ и углом $D_1DC = 60°$;

3) грань $D_1C_1B_1A_1$ — прямоугольник тех же размеров, что и грань $ABCD$;

4) грань A_1B_1BA — параллелограм тех же размеров, что и грань D_1C_1CD. Если отложить на стороне AB отрезок, равный AK, и провести прямую $KLMNK$, перпендикулярную к ребру AB, то эта прямая — след сечения $KLMN$ наклонной призмы, и, так как это сечение — прямоугольник, то двугранные углы, образуемые гранями призмы, — прямые.

Развертка $ABCC_1B_1BAA_1D_1D$ четырехугольной наклонной призмы — невыпуклый десятиугольник. Если провести в развертке прямые DA и CB, то полученный десятиугольник развертки равновелик прямоугольнику $ABBA$ (равносоставленные фигуры), так как трапеции CC_1B_1B и DD_1A_1A равны, а потому площадь развертки равна $BB \cdot AB$, или $KK \cdot AB$, или, наконец, $P_\perp \cdot l$. Итак,

$$S_{бок} = KL \cdot l + LM \cdot l + MN \cdot l + NK \cdot l = (KL + LM + MN + NK) \cdot l = P_\perp \cdot l.$$

Вычислив стороны прямоугольника сечения $KLMN$, находим $P_\perp$ и боковую (внутреннюю) поверхность призмы.

$$NK = N_1B = \sqrt{BB_1^2 - N_1B_1^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3},$$

так как $N_1B_1 = \frac{1}{2} BB_1 = \frac{1}{2} a$, как катет, лежащий против угла в 30°.

Итак, $P_\perp = 2a + a\sqrt{3} = a(2+\sqrt{3})$ и $S_{бок} = al(2+\sqrt{3})$ кв. ед.

Если дан угол α, не равный 60°, то $N_1B = a\sin\alpha$ и $P_\perp = 2a + 2a\sin\alpha$ и

$$S_{бок} = 2al(1+\sin\alpha) = 4al\cos^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) \text{ кв. ед.}$$

Следует заметить, что слово „поверхность“ имеет двоякий смысл; поверхность есть граница тела или поверхность есть сумма площадей всех граней многогранника или вообще какого-либо тела. Некоторые авторы, имея в виду поверхность во втором указанном выше смысле, говорят: „площадь поверхности“ тела; считаем этот термин удачным, все же для краткости будем пользоваться только одним словом: поверхность.

Следует подчеркнуть, что боковая поверхность прямой призмы и правильной призмы вычисляется также по формуле, выведенной для вычисления боковой поверхности наклонной призмы; при этом основание прямой призмы одинаково с ее поперечным перпендикулярным сечением.

2. Примеры задач на вычисление поверхностей призм и запись решения этих задач.

1) Диагональ правильной четырехугольной призмы равна d. Боковая поверхность равна m^2. Найти высоту призмы.

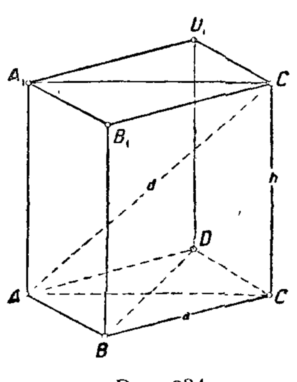


Рис. 234.

Изображение призмы желательно дать таковым, чтобы диагональное сечение призмы было параллельно вертикальной плоскости чертежа, так как при этом условии диагональ призмы не искажается и дается на рисунке при соблюдении принятого масштаба в действительную величину.

Нелишне указать учащимся, что при решении данной задачи целесообразно обозначить площадь боковой поверхности призмы квадратом какого-нибудь числа, обозначить, например, через m^2, подчеркивая тем самым размерность заданной величины. Это позволяет, решая задачу в общем виде, проверять правильность выкладок; так, если левая и правая части записанных равенств не одного и того же измерения, то очевидно, что записанные равенства не верны и что необходимо поэтому проверить уже выполненное решение.

Построив, согласно сделанному указанию, призму и обозначив диагональ ее через d, высоту призмы или боковое ребро через h и сторону основания через a (рис. 234), имеем:

$$S_{бок} = 4a\cdot h \text{ или } m^2 = 4a\cdot h, \text{ откуда } h = \frac{m^2}{4a}.$$

Как видно, задача сводится к нахождению a. Из треугольника ACC_1 имеем: $2a^2 + h^2 = d^2$, откуда $a = \sqrt{\frac{d^2-h^2}{2}}$, а потому

$$h = \frac{m^2}{4\sqrt{\frac{d^2-h^2}{2}}} = \frac{m^2}{2\sqrt{2(d^2-h^2)}}.$$

Решив это уравнение относительно h, получим:

$$8h^2(d^2-h^2)=m^4,$$
$$8h^2d^2-8h^4=m^4,$$
$$8h^4-8h^2d^2+m^4=0;$$
$$h=\sqrt{\frac{4d^2\pm\sqrt{16d^4-8m^4}}{8}}=\frac{1}{2}\sqrt{2d^2\pm\sqrt{4d^4-2m^4}}.$$

Перед корнем сохраняем знак плюс, имея в виду только абсолютную величину высоты h, и не рассматривая направления, в котором производится измерение h; под радикалом оставляем два знака, так как $\sqrt{4d^4-2m^4}<2d^2$, и потому задача имеет два решения.

Рассматривая в последовательном порядке все встречающиеся равенства, учащиеся увидят, что все они однородны.

Если $4d^4-2m^4=0$, то $4d^4=2m^4$, откуда $d^2=\frac{m^2}{\sqrt{2}}$ и $h=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. В этом случае в прямоугольном треугольнике ACC_1 катет CC_1, высота призмы, был бы вдвое меньше катета $AC=a\sqrt{2}$, который является диагональю основания призмы.

Для частных значений d и m^2, например $d=3$ и $m^2=8$, получим:

$$h_1=\frac{1}{2}\sqrt{18+\sqrt{324-128}}=\frac{1}{2}\sqrt{18+14}=2\sqrt{2};$$
$$h_2=\frac{1}{2}\sqrt{18-14}=1.$$

Решение задачи дано в общем виде. Необходимо приучать учащихся решать задачи в общем виде чтобы иметь возможность исследовать полученное решение. Когда найдено частное значение искомой величины, можно предложить учащимся дать чертеж, элементы которого соответствуют найденным значениям искомого. Так, в данной задаче построение свелось бы, пользуясь частными значениями $d=3$, $m^2=8$, к построению прямоугольного треугольника по $d=3$ и $h=2\sqrt{2}$ или по $d=3$ и $h=1$.

2) Основанием прямой призмы служит ромб; площади диагональных сечений призмы равны m^2 и n^2. Найти боковую поверхность призмы.

Боковая поверхность призмы: $S_{бок}=P\cdot H=4aH$, где a — сторона основания призмы.

Задача сводится к вычислению a и H или aH.

Обозначим диагонали основания через $2d_1$ и $2d_2$, тогда

$$a^2=d_1^2+d_2^2 \quad \text{и} \quad a=\sqrt{d_1^2+d_2^2},$$

следовательно,

$$S_{бок}=4H\cdot\sqrt{d_1^2+d_2^2}. \qquad (1)$$

По условию $2d_1\cdot H=m^2$ и $2d_2\cdot H=n^2$, откуда

$$d_1=\frac{m^2}{2H}, \quad d_2=\frac{n^2}{2H} \quad \text{и} \quad d_1^2+d_2^2=\frac{m^4+n^4}{4H^2} \quad \text{и}$$
$$4H^2(d_1^2+d_2^2)=m^4+n^4$$

или

$$2H\sqrt{d_1^2+d_2^2}=\sqrt{m^4+n^4}.$$

Последнее равенство — уравнение с тремя неизвестными; для вычисления неизвестных H, d_1 и d_2 следовало бы составить еще два уравнения с теми же неизвестными, однако ни из условия задачи, ни на основании числовой зависимости между элементами данной призмы нельзя составить еще два уравнения, содержащие неизвестные, подлежащие определению, и, таким образом, задача как будто является неразрешимой. Между тем, если внимательно всмотреться в последнее полученное равенство, то ясно, что левая его часть содержит половину того выражения, которое входит в формулу, составленную для вычисления боковой поверхности данной призмы, а потому

$$S_{бок}=2\sqrt{m^4+n^4} \text{ кв. ед.}$$

Для частных значений: $m^2=6$ и $n^2=8$ находим, что

$$S_{бок}=2\sqrt{36+64}=20 \text{ кв. ед.}$$

Такого рода задачи полезны тем, что показывают учащимся, что бывают случаи, когда нельзя найти значений каждой отдельной величины, входящей в ту или иную формулу, и что в таких случаях необходимо найти значение отдельного выражения или части его в таком сочетании, в каком оно входит в искомую формулу.

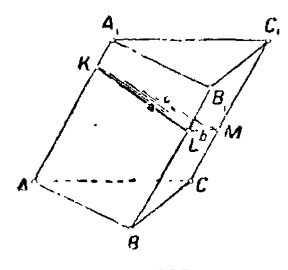


Рис. 235.

Полезно предложить учащимся формулировать полученный общий вывод; это приучает их читать формулы. В данном случае формулировка полученного вывода такова:

Боковая поверхность прямой призмы, основание которой — ромб, равна удвоенному квадратному корню из суммы квадратов площадей диагональных сечений призмы.

Понятно, что формулировка полученного вывода возможна только тогда, когда задача решена в общем виде. Типовую задачу, как правило, следует всегда решать в общем виде, так как, если при решении задачи непосредственно используются частные значения входящих в задачу величин, мы лишаемся возможности провести исследование задачи.

3) В треугольной наклонной призме две грани образуют двугранный угол α, равный 60°; площади этих граней равны $m^2=5$ и $n^2=8$. Найти боковую поверхность призмы.

$S_{бок}=P_{\perp}\cdot l$, а потому задача сводится к вычислению 1) периметра поперечного сечения $P_{\perp}=a+b+c$, где a, b и c — стороны поперечного сечения, и 2) ребра призмы l.

Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — данная призма (рис. 235); ее грань ACC_1A_1 лежит в плоскости чертежа. KLM — поперечное сечение. Тогда

$$S_{бок}=(a+b+c)\cdot l=al+bl+cl.$$

Но по условию $al = m^2$ и $cl = n^2$, следовательно, $S_{бок} = m^2 + n^2 + bl$, и, таким образом, задача сводится к вычислению b и l.

Из треугольника KLM находим: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\alpha$; но $\alpha = 60°$ и $\cos 60° = \frac{1}{2}$, а потому $b^2 = a^2 + c^2 - ac$.

Из равенств $al = m^2$ и $cl = n^2$ имеем:

$$a = \frac{m^2}{l}, \quad c = \frac{n^2}{l} \text{ и } ac = \frac{m^2n^2}{l^2}.$$

Следовательно.

$$b^2 = \frac{m^4}{l^2} + \frac{n^4}{l^2} - \frac{m^2n^2}{l^2} = \frac{m^4 + n^4 - m^2n^2}{l^2},$$

откуда находим:

$$b = \frac{1}{l}\sqrt{m^4 + n^4 - m^2n^2}.$$

Итак,

$$S_{бок} = m^2 + n^2 + \frac{1}{l} \cdot l\sqrt{m^4 + n^4 - m^2n^2} =$$

$$= m^2 + n^2 + \sqrt{m^4 + n^4 - m^2n^2} \text{ кв. ед.}$$

Для частных значений m^2 и n^2, если $m^2 = 5$ и $n^2 = 8$, имеем

$$S_{бок} = 5 + 8 + \sqrt{5^2 + 8^2 - 5 \cdot 8} = 5 + 8 + 7 = 20 \text{ кв. ед.}$$

4) В правильной треугольной призме проведено сечение через сторону основания и противолежащую вершину другого основания; угол, образуемый плоскостями сечения и основания, равен α и площадь сечения равна m^2. Найти боковую поверхность этой призмы.

Данная задача требует применения тригонометрии.

Построим призму и ее сечение $B_1A_2C_1$ (рис. 236). Соединив середину M стороны B_1C_1 с вершинами A_2 и A_1, получим $\angle A_1MA_2 = \alpha$.

$$S_{бок} = P \cdot H = 3a \cdot H, \qquad (1)$$

где a — сторона основания и H — высота призмы. Находим a и H.

Из треугольника A_2A_1M, в котором $A_1M = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\angle A_1MA_2 = \alpha$ и $A_1A_2 = H$, получаем:

$$H = \frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha. \qquad (2)$$

Рис. 236.

В это уравнение (2) входят неизвестные a и H, а потому надо составить еще одно уравнение с теми же неизвестными или хотя бы с одним из них.

Подставляя значение H (2) в формулу (1), имеем:

$$S_{бок} = 3a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha. \qquad (3)$$

Находим площадь треугольника $A_1B_1C_1$; она равна

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = m^2\cos\alpha$$

или

$$a^2\sqrt{3} = 4m^2 \cos \alpha. \qquad (4)$$

Подставив найденное выражение (4) в формулу для $S_{бок}$ (3), получим:

$$S_{бок} = \frac{3 \cdot 4m^2 \cos \alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha = 6\, m^2 \sin \alpha \text{ кв. ед.}$$

Итак, боковая поверхность правильной треугольной призмы равна ушестеренному произведению площади сечения, проходящего через одну из сторон одного основания и противолежащую взятой стороне вершину другого основания, на синус угла, образуемого плоскостями сечения и основания.

§ 49. Поверхность пирамиды. Задачи.

1. Вывод формулы для вычисления боковой поверхности правильной пирамиды

$$S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot h \text{ кв. ед.},$$

где $S_{бок}$ означает боковую поверхность, P — периметр основания и h — апофему пирамиды,—не представляет затруднений. Должно обратить внимание учащихся на то, что в данную формулу входит числовой множитель $\frac{1}{2}$; это нетрудно запомнить, если учащиеся уяснили себе связь боковой поверхности пирамиды с площадью треугольника. Желательно дать учащимся для вычисления боковой поверхности правильной пирамиды еще и другую формулу, в которую входит площадь Q основания пирамиды и угол α наклона плоскости боковой ее грани к плоскости основания:

$$S_{бок} = Q : \cos \alpha = Q \sec \alpha \text{ (кв. ед.)}.$$

Следует указать учащимся, что обе формулы верны и для тех неправильных пирамид, основаниями которых является такой многоугольник, в который можно вписать окружность, и вершина которых проектируется в центр вписанной окружности, так как в данном случае плоскости всех боковых граней пирамиды образуют с плоскостью основания один и тот же угол; высоты боковых граней, проведенные из вершины S пирамиды, все равны, ибо их проекциями являются радиусы вписанной в основание окружности.

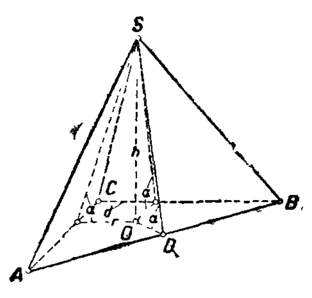


Рис. 237.

Так, если требуется вычислить боковую поверхность треугольной пирамиды, основание которой — прямоугольный треугольник с катетами a и b и каждая боковая грань которой наклонена к плоскости основания под углом α (рис. 237), то боковую поверхность такой пирамиды можно вычислить двояко:

1) $S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot h$, где P — периметр основания и h — высота каждой

боковой грани:

$$P = a + b + \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$h = \frac{r}{\cos\alpha} = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2\cos\alpha}$$

так как $2r = a + b - c$, а потому

$$S_{\text{бок}} = \frac{(a + b + \sqrt{a^2 + b^2})(a + b - \sqrt{a^2 + b^2})}{2\cdot 2\cos\alpha} = \frac{2ab}{4\cos\alpha} = \frac{ab}{2\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2} ab \sec\alpha \text{ (кв. ед.)}.$$

2) Используя вторую формулу, имеем:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} ab : \cos\alpha = \frac{1}{2} ab \sec\alpha \text{ (кв. ед.)}.$$

Получен тот же результат, при этом значительно проще.

Если $a = 3$, $b = 4$ и $\alpha = 60°$, то

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot 2 = 12 \text{ кв. ед.}$$

Что касается остальных неправильных пирамид, то поверхность их вычисляется по частям. Указывается, что для вычисления полной поверхности пирамиды нужно к боковой ее поверхности прибавить площадь ее основания. Записывается это так:

$$S_n = S_{\text{бок}} + S_o,$$

где S_n — полная поверхность, $S_{\text{бок}}$ — боковая поверхность и S_o — площадь основания пирамиды.

2. Примеры на вычисление поверхностей неправильных пирамид.

1) Основанием пирамиды служит ромб. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания, и двугранный угол α, образуемый ими, равен 120°; две другие грани наклонены к плоскости основания под углом $\beta = 30°$. Высота пирамиды равна h. Найти площади основания и боковых граней.

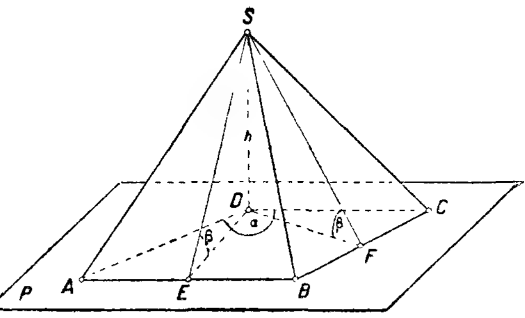


Рис. 238.

Если две смежные боковые грани SDC и SDA (рис. 238) перпендикулярны к плоскости основания, то общее их ребро SD перпендикулярно к ней и, следовательно, является высотой пирамиды. Поэтому, построив ромб $ABCD$, проводим DS — высоту пирамиды — и соединяем точку S с точками A, B, C и D. Проведя затем $DE \perp AB$ и $DF \perp BC$, получим $\angle SED = \angle SFD = \beta$. Угол $ADC = \alpha$ — линейный угол двугранного угла, образуемого боковыми гранями, перпендикулярными к плоскости основания.

Вычисляем площадь основания: пл. $ABCD = AB\cdot DE$. Высота DE находится из прямоугольного треугольника SDE, в котором $\beta = 30°$,

а потому $SE = 2h$ и $DE = \sqrt{4h^2 - h^2} = h\sqrt{3}$. Сторона $AB = AD$ находится из треугольника AED, в котором $\angle A = 60°$ и $\angle ADE = 30°$.

Пусть $AE = x$, тогда $AD = 2x$ и $DE = h\sqrt{3}$, следовательно, $4x^2 - x^2 = 3h^2$, откуда $x^2 = h^2$ и $x = h$.

Находим: $AD = AB = 2x = 2h$ и площадь $ABCD = 2h \cdot h\sqrt{3} = 2h^2\sqrt{3}$ кв. ед.

Пл. ADS = пл. $CDS = \frac{1}{2} 2h \cdot h = h \cdot h = h^2$ кв. ед.

Пл. BSC = пл. $ASB = \frac{1}{2} BC \cdot SF = \frac{1}{2} 2h \cdot SF = h \cdot SF$; высота SF находится из треугольника SDF; $\angle\beta = 30°$, а потому $SF = 2SD = 2h$, а потому пл. BSC = пл. $ASB = h \cdot 2h = 2h^2$ кв. ед.

Можно найти каждую из площадей треугольников ASB и BSC иначе. Приняв во внимание, что пл. ASB + пл. BSC = пл. $ABCD : \cos\beta = \frac{2h^2\sqrt{3}}{\cos 30°} = \frac{2h^2\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 4h^2$, находим, что каждая из искомых площадей равна $\frac{1}{2} \cdot 4h^2 = 2h^2$ кв. ед.

2) В правильной четырехугольной пирамиде проведена плоскость через вершину основания перпендикулярно к противолежащему ребру, которое она делит пополам. В каком отношении плоскость эта делит боковую поверхность пирамиды?

Данную пирамиду следует построить так, чтобы диагональное ее сечение лежало в плоскости чертежа и, следовательно, изображалось, с учетом масштаба, в действительную величину, без сокращений. В таком случае прямой угол AKC, под которым сечение пересекает ребро SA пирамиды, не искажается, он окажется и на чертеже прямым (рис. 239).

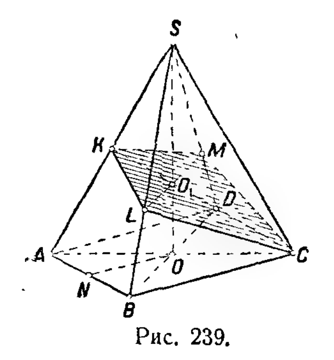


Рис. 239.

Согласно условию, CK перпендикулярно к AS и делит ребро AS пополам, таким образом, CK — и высота и медиана треугольника ASC, следовательно, $SC = CA$; но если $SC = CA$ и $SC = SA$, то треугольник ASC — равносторонний. Поэтому, построив основание пирамиды — квадрат — так, чтобы его диагональ AC была параллельна вертикальной плоскости чертежа, строим на диагонали AC равносторонний треугольник ASC — диагональное сечение пирамиды — и, соединив точку S с точками B и D, получим изображение искомой правильной пирамиды. Затем соединяем вершину C с серединой K ребра SA; прямая CK лежит в плоскости сечения и пересекает прямую SO, лежащую в плоскости диагонального сечения, в точке O_1, $OO_1 = \frac{1}{2} O_1S = \frac{1}{3} SO$. Сечение, перпендикулярное к ребру SA, должно дать линейный угол двугранного угла при ребре SA, а потому прямые KM и KL, по которым это сечение должно пересекать грани ASB и ASD, перпендикулярны к SA; они — медиатрисы общего ребра SA равных граней ASB и ASD, а потому $\triangle SKL = \triangle SKM$ по двум катетам, откуда $SM = SL$, т. е. треугольник

LSM — равнобедренный и, следовательно, $LM \parallel BD$. Итак, для получения перпендикулярного сечения следует провести через точку O_1 прямую $LM \parallel BD$; этим определятся еще две вершины L и M искомого сечения; $KLCM$ — четырехугольник сечения, дельтоид (рис. 239).

Находим отношение частей поверхности, на которые указанным сечением делится боковая поверхность пирамиды.

Обозначив площадь одной из боковых граней пирамиды через m^2, имеем:

$$\frac{\text{пл. } ASB}{\text{пл. } KSL} = \frac{SA \cdot SB}{SK \cdot SL} = \frac{SA \cdot SB}{\frac{1}{2} SA \cdot \frac{2}{3} SB} = 3;$$

значит,

$$\text{пл. } KSL = \frac{1}{3} m^2 \text{ и } \frac{\text{пл. } BSC}{\text{пл. } LSC} = \frac{SB \cdot SC}{\frac{2}{3} SB \cdot SC} = \frac{3}{2};$$

значит,

$$\text{пл. } LSC = \frac{2}{3} m^2,$$

и, следовательно, поверхность верхней части пирамиды равна

$$2 \cdot \frac{1}{3} m^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} m^2 = 2m^2,$$

что составляет половину боковой поверхности пирамиды, так как боковая ее поверхность равна $4m^2$. Итак, боковая поверхность пирамиды делится плоскостью данного сечения пополам.

Решение данной задачи приведено для того, чтобы показать один из методов решения; весьма часто забывают использовать отношение площадей треугольников, имеющих по равному углу или два угла которых пополнительны. Приемом, которым решена данная задача, решаются многие вопросы, относящиеся к пирамидам.

§ 50. Поверхность усеченной пирамиды.

1. При выводе формулы боковой поверхности правильной усеченной n-угольной пирамиды легко обнаружить, что искомая поверхность представляет собой сумму площадей n равных граней, из которых каждая — равнобедренная трапеция с основаниями a_n и b_n и высотой h.

$$S_{\text{бок}} = \frac{a_n + b_n}{2} \cdot nh = \frac{P_n + p_n}{2} \cdot h,$$

где P_n и p_n — периметры оснований, а h — апофема правильной усеченной пирамиды.

2. Полезно познакомить учащихся еще с двумя формулами для вычисления боковой поверхности усеченной пирамиды.

1) Если провести в правильной усеченной пирамиде сечение перпендикулярно к высоте, проходящее через ее середину, то периметр этого „среднего“ сечения

$$P_{\text{ср}} = \frac{P_n + p_n}{2} \text{ и } S_{\text{бок}} = P_{\text{ср}} \cdot h.$$

Данная формула напоминает собой формулу для вычисления площади трапеции.

2) Если спроектировать в правильной усеченной пирамиде меньшее основание ее на большее, то

$$S_{бок} = (Q - q) : \cos\alpha = (Q - q)\cdot\sec\alpha,$$

где Q и q — площади большего и меньшего оснований пирамиды и α — угол наклона боковых граней пирамиды к плоскости большего ее основания (рис. 240).

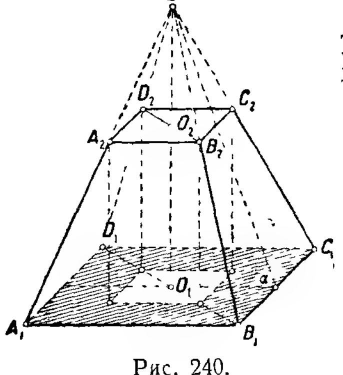


Рис. 240.

Рис. 241.

3. При выборе задач на вычисление следует отдавать преимущество задачам, в которых требуется провести то или иное сечение; тем самым учащиеся вынуждаются уделять не меньше внимания геометрической стороне вопроса, чем вычислительной. Полезны задачи, в которых встречаются сочетания призм и пирамид.

Задача. Равносторонний треугольник служит основанием прямой призмы и прямой пирамиды так, что при одной и той же высоте боковая поверхность призмы в n раз больше боковой поверхности пирамиды. Найти отношение стороны основания пирамиды к высоте пирамиды.

Пусть высота SO обоих тел равна H и сторона основания равна a; требуется найти $\frac{a}{H}$ (рис. 241).

$$S_{бок\ пр} = 3\cdot aH;\quad S_{бок.\ пир} = \frac{3a}{2}\cdot h \text{ и}$$

$$h = SK = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{H^2 + \frac{3a^2}{36}}.$$

По условию задачи $S_{бок.\ пр} = nS_{бок.\ пир}$, следовательно,

$$3aH = n\cdot\frac{3a}{2}\sqrt{H^2 + \frac{3a^2}{36}}.$$

Вынося H за знак радикала и преобразуя данное равенство, имеем:

$$3aH = n\cdot\frac{3a}{2}\cdot H\cdot\sqrt{1 + \frac{1}{12}\cdot\frac{a^2}{H^2}},$$

$$2 = n\sqrt{1 + \frac{1}{12}\cdot\frac{a^2}{H^2}},$$

$$4 = n^2 + \frac{n^2}{12}\cdot\frac{a^2}{H^2},\quad \text{или}\quad \frac{n^2}{12}\cdot\frac{a^2}{H^2} = 4 - n^2,$$

откуда

$$\frac{a^2}{H^2} = \left(\frac{4 - n^2}{n^2}\right)12 \quad\text{или}\quad \frac{a}{H} = \sqrt{\frac{(4 - n^2)\,12}{n^2}}$$

и, наконец,

$$\frac{a}{H} = \frac{2}{n}\sqrt{3\,(4 - n^2)}.$$

Необходимо исследовать полученный результат. Подкоренное выражение правой части равенства содержит множитель $4-n^2$; вместе с тем, отношение $\frac{a}{H}$ имеет смысл только при условии, если $4-n^2>0$, откуда следует, что $n<2$.

При $n>2$ отношение $\frac{a}{H}$ будет мнимым, и задача, следовательно, не имеет смысла.

Если $n=2$, то $\frac{a}{H}=0$. Дробь $\frac{a}{H}$, однако, может равняться нулю только при двух условиях: или при $a=0$, или при $H=\infty$. И эти два случая следует исключить, ибо при $a=0$ и призма и пирамида обращаются в прямую; при $H=\infty$ нет ни пирамиды ни призмы.

Итак, n должно быть меньше 2.

Допустим еще, что $n=1$. При этом значении n боковые поверхности равны, и тогда

$$\frac{a}{H}=\frac{2}{1}\cdot\sqrt{3\cdot 3}=6 \text{ и } a=6H,$$

т. е. высота призмы в 6 раз меньше стороны ее основания.

Может быть задан вопрос: во сколько раз боковая поверхность призмы больше боковой поверхности пирамиды, если $\frac{a}{H}=2$, т. е. сторона основания призмы вдвое больше высоты? В таком случае имеем:

$$2=\frac{2}{n}\sqrt{3(4-n)},$$

откуда $n^2=3(4-n^2)$ и $4n^2=12$; $n^2=3$ и $n=\sqrt{3}$.

Этот анализ показывает, что, задавая числовые значения для n, следует задать $n<2$.

§ 51. Поверхность правильных многогранников.

1. Указания о вычислении поверхностей правильных многогранников по данному их ребру приведены в стабильном учебнике. Следует только отметить, что поверхность неправильных многогранников, как и поверхность неправильных пирамид, вычисляется по частям; сперва находится площадь каждой грани, а затем берется их сумма.

Отношение поверхностей призм и пирамид.

2. Обозначив боковые поверхности двух прямых призм через S_1 и S_2, их полные поверхности через S'_n и S''_n, их высоты через H_1 и H_2, периметры оснований через P_1 и P_2, имеем:

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{P_1H_1}{P_2H_2}=\frac{P_1}{P_2}\cdot\frac{H_1}{H_2} \text{ и } \frac{S'_n}{S''_n}=\frac{P_1H_1+2Q_1}{P_2H_2+2Q_2}.$$

При $H_1=H_2$ или $P_1=P_2$ соответственно имеем

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{P_1}{P_2} \text{ или } \frac{S_1}{S_2}=\frac{H_1}{H_2}.$$

Если призмы подобны, то

$$\frac{H_1}{H_2}=\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\ldots=\frac{P_1}{P_2},$$

и тогда

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{P_1}{P_2}\cdot\frac{H_1}{H_2}=\frac{H_1^2}{H_2^2}=\frac{P_1^2}{P_2^2}=\frac{a_1^2}{a_2^2}=\ldots$$

$$\frac{S'_n}{S''_n}=\frac{H_1^2}{H_2^2}=\frac{P_1^2}{P_2^2}=\frac{a_1^2}{a_2^2}=\ldots,$$

ибо из пропорций $\frac{P_1}{P_2}=\frac{H_1}{H_2}=\frac{a_1}{a_2}$ следует, что $\frac{P_1H_1}{P_2H_2}=\frac{a_1^2}{a_2^2}$.

Но $\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{a_1^2}{a_2^2}$ или $\frac{2Q_1}{2Q_2}=\frac{a_1^2}{a_2^2}$, значит $\frac{P_1H_1}{P_2H_2}=\frac{2Q_1}{2Q_2}=\frac{a_1^2}{a_2^2}$,

откуда

$$\frac{P_1H_1+2Q_1}{P_2H_2+2Q_2}=\frac{a_1^2}{a_2^2}=\frac{P_1^2}{P_2^2}=\frac{H_1^2}{H_2^2}=\ldots$$

Аналогичные равенства можно получить для поверхностей двух пирамид или двух подобных пирамид, а потому поверхности, боковые или полные, подобных призм или пирамид относятся, как квадраты их линейных сходственных элементов или как площади их сходственных граней, одинаково расположенных. Знание этих отношений позволяет при сравнении модели какой-нибудь детали с оригиналом утверждать, если известно, что деталь построена в масштабе $1:n$, что поверхности оригинала и модели относятся, как $1:n^2$; точно так же, если все линейные размеры какого-либо тела уменьшены в 2, 3, 4, ... n раз, то поверхности тел соответственно уменьшатся в 2^2, 3^2, 4^2, ... n^2 раз.

Задачи и вопросы.

1. Боковая поверхность правильной треугольной призмы $S_{бок}=m^2$. Диагональ боковой грани равна n. Найти высоту призмы. Вычислить высоту при $m^2=36$ *см*^{2} и $n=5$ *см*.

2. Площадь наибольшего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы равна m^2. Вычислить боковую и полную поверхности призмы.

3. Боковое ребро прямой треугольной призмы равно радиусу окружности, вписанной в основание призмы. Найти отношение боковой поверхности призмы к сумме площадей обоих оснований.

4. В правильной четырехугольной призме провести сечение, проходящее через сторону верхнего основания и образующее с его плоскостью угол $\alpha=45°$. Сторона основания призмы равна a, высота равна H. Найти полную поверхность неправильно усеченной призмы, стоящей на нижнем основании.

5. Из правильной треугольной призмы, сторона основания которой равна a, вырезана двумя параллельными сечениями наклонная призма, боковое ребро которой b ($b<a$). Найти боковую поверхность этой наклонной призмы.

6. Найти полную поверхность правильной треугольной пирамиды, высота которой h и боковое ребро l.

7. Высота треугольной пирамиды, стороны основания которой a, b и c, равна h. Основание высоты отстоит от сторон основания пирамиды на расстояния l, m и n. Найти полную поверхность пирамиды. (В задаче имеется одно лишнее данное.)

8. Трехгранный угол, все плоские углы которого — прямые, пересечен плоскостью так, что в сечении получился правильный треугольник со стороной a. Найти полную поверхность образовавшейся пирамиды.

9. Грани трехгранного угла, все плоские углы которого прямые, пересечены двумя параллельными плоскостями, дающими в сечениях правильные треугольники,

стороны которых соответственно равны a и b $(a > b)$. Найти полную поверхность усеченной пирамиды, заключенной между этими плоскостями.

10. Как относится поверхность правильного октаэдра к поверхности тетраэдра, полученного продолжением через одну граней октаэдра?

11. Центры граней куба служат вершинами правильного октаэдра. Поверхность куба равна m^2. Чему равна поверхность октаэдра (см. рис. 230)?

12. Высота пирамиды равна H. Боковая поверхность ее делится плоскостями, параллельными основанию пирамиды, на n равных частей. На каком расстоянии от вершины проведены эти плоскости?

Указания к задачам и вопросам.

1. Делается набросок рисунка, изображающего правильную треугольную призму в масштабе 1:1, $\varphi = 45°$ и $k = 0{,}5$ (рис. 242). Для вычисления боковой поверхности призмы надо знать высоту H призмы, поэтому вычисляем ее из прямоугольного треугольника:

$$H^2 = n^2 - a^2, \tag{1}$$

где n — диагональ боковой грани призмы и a — сторона ее основания. Полученное равенство — уравнение с двумя неизвестными, следовательно, для нахождения неизвестных необходимо составить еще одно уравнение с этими же неизвестными.

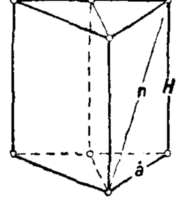


Рис. 242.

Используется условие задачи, согласно которому боковая поверхность призмы равна m^2. Имеем, используя формулу $S_{бок} = P \cdot H$, что

$$3aH = m^2. \tag{2}$$

Решаем систему двух уравнений (1) и (2):

$$a = \frac{m^2}{3H};\ H^2 = n^2 - \frac{m^4}{9H^2} \text{ или } 9H^4 - 9n^2H^2 + m^4 = 0,$$

откуда

$$H = \pm\sqrt{\frac{9n^2 \pm \sqrt{81n^4 - 36m^4}}{18}}.$$

Перед корнем сохраняем лишь один знак плюс, ибо не принимается во внимание направление, по которому откладывается высота. Дискриминант $81n^4 - 36m^4$ должен быть больше или равен нулю. Принимая n и m за положительные числа, имеем: $81n^4 - 36m^4 > 0$, откуда $81n^4 \geqq 36m^4$, или $3n \geqq m\sqrt{6}$. При $3n = m\sqrt{6}$ имеем:

$$H = \sqrt{\frac{n^2}{2}} = \frac{n}{\sqrt{2}} = \frac{n\sqrt{2}}{2};$$

если $3n > m\sqrt{6}$, имеем:

$$H_1 = \sqrt{\frac{9n^2 + \sqrt{81n^4 - 36n^4}}{18}} \text{ и } H_2 = \sqrt{\frac{9n^2 - \sqrt{81n^4 - 36m^4}}{18}}.$$

Находить в общем виде выражение для a в данной задаче нет необходимости, ибо при H положительном задача всегда имеет смысл.

Подставляя числовые данные, получаем:

$$H_1 = \sqrt{\frac{3n^2 + \sqrt{9n^4 - 4m^4}}{6}} = \sqrt{\frac{3n^2 + \sqrt{(3n^2 + 2m^2)(3n^2 - 2m^2)}}{6}} =$$

$$= \sqrt{\frac{75 + \sqrt{147 \cdot 3}}{6}} = \sqrt{\frac{75 + 3 \cdot 7}{6}} = \sqrt{\frac{75 + 21}{6}} = 4.$$

$$H_2 = \sqrt{\frac{75 - 21}{6}} = 3.$$

Итак, высота призмы равна или 4 *см* или 3 *см*; в соответствии в этим находим:

$$a_1=\frac{m^2}{3\cdot H}=\frac{36}{12}=3 \text{ см};$$

$$a_2=\frac{m^2}{3\cdot H}=\frac{36}{9}=4 \text{ см}.$$

Полученные два ответа не трудно пояснить: боковая грань призмы — прямоугольник, и диагональ и площадь его не зависят от того, которая из двух сторон прямоугольника принята за основание, которая — за высоту.

2. Следует вычертить основание призмы — правильный шестиугольник — так, чтобы наибольшая диагональ была параллельна вертикальной плоскости чертежа; причем достаточно вычертить лишь половину призмы (рис. 243).

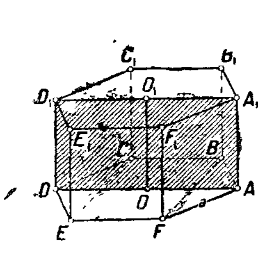


Рис. 243.

Рис. 244.

Запись решения:

$$\boxed{S_{бок}=P\cdot H}$$

$$S_{бок}=6aH$$

$$a=?\quad H=? \text{ или } aH=?$$

$$2aH=m^2$$

$$S_{бок}=3m^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Для вычисления боковой поверхности нужно было бы найти a и H, но так как, согласно условию, $2aH=m^2$, то вопрос о вычислении и a и H отпадает, да и вычислить их в отдельности нельзя. В самом деле, стороны прямоугольника одной из граней призмы — при заданном значении его площади могут принимать какие угодно значения, лишь бы их произведение равнялось $\frac{m^2}{2}$.

$$S_{полн}=S_{бок}+12\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=3m^2+3a^2\sqrt{3}=3\,(m^2+a^2\sqrt{3}) \text{ кв. ед.}$$

3. Согласно условию, требуется найти $\frac{S_{бок}}{2Q}$, где Q — площадь основания призмы. Обозначив стороны основания призмы через a, b и c и высоту призмы через H, имеем: $S_{бок}=(a+b+c)\,H=2p\cdot H$; но, по условию, $H=r$, а потому $S_{бок}=2p\cdot r$. Площадь же основания $Q=p\cdot r$, а потому $2Q=2pr$; следовательно

$$\frac{S_{бок}}{2Q}=\frac{2pr}{2pr}=1.$$

Таким образом, искомое отношение равно 1, т. е. $S_{бок}=2Q$.

4. Построив призму и ее сечение A_2KLD_2, получим неправильно усеченную призму $A_1B_1C_1D_1A_2KLD_2$ (рис. 244). Полная ее поверхность находится по частям: $S_{полн}=2$ пл. $A_2A_1B_1K+$ пл. B_1C_1LK+ пл. $A_2A_1D_1D_2+$ пл. $A_1B_1C_1D_1+$ пл. A_2KLD_2.

1) 2 пл. $A_2A_1B_1K=2\cdot\frac{H+H-a}{2}\cdot a=(2H-a)\,a$, ибо треугольник A_2B_2K — прямоугольный и равнобедренный, так как

$$\angle B_2A_2K=45^\circ \text{ и } B_2K=a, \text{ а } KB_1=H-a.$$

2) пл. $B_1C_1LK=a\,(H-a)$,
3) пл. $A_2A_1D_1D_2=aH$,
4) пл. $A_1B_1C_1D_1=a^2$,
5) пл. $A_2KLD_2=a\cdot a\sqrt{2}=a^2\sqrt{2}$, ибо $A_2K=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.

Складывая почленно полученные равенства, имеем:

$$S_{полн}=2Ha-a^2+aH-a^2+Ha+a^2+a^2\sqrt{2}=4aH+a^2\sqrt{2}-a^2=$$
$$=a\,(4H+a\sqrt{2}-a) \text{ кв. ед.}$$

5. В условии задачи не указано, какой угол образуют плоскости сечений с плоскостью основания, а потому можно их провести под любым углом однако под таким углом, чтобы „вырезать“ наклонную призму, т. е. чтобы обе плоскости сечения пересекали все три боковых ребра (рис. 245).

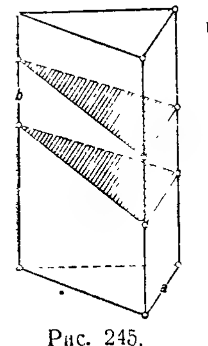


Рис. 245.

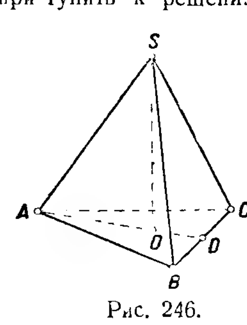


Рис. 246.

Если учащиеся, как это обычно бывает, не знают, как приступить к решению данной задачи, следует предложить им вспомнить, чему равна боковая поверхность призмы; вспоминается формула $S_{бок}=P_{\perp}\cdot l$. Затем следует предложить им построить перпендикулярное сечение, они убеждаются, что таким сечением является плоскость основания данной пирамиды; после этого находят, что $S_{бок}=3ab$ (кв. ед.).

6. Приступая к построению пирамиды, следует напомнить учащимся, что вершина пирамиды проектируется в центр основания и что $OD=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{3}AD$ (рис. 246); правильно выполненный рисунок имеет в данном случае решающее значение; более целесообразно расположить изображение пирамиды на горизонтальной плоскости так, чтобы высота AD основания была параллельна вертикальной плоскости чертежа.

Запись решения:

$$\boxed{S_{полн}=S_{бок}+Q} \text{ кв. ед.}$$

$$S_{полн}=\frac{3ab}{2}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a}{4}(6b+a\sqrt{3}),$$

где a — сторона основания и b — апофема.

$$a=?\quad b=?$$

$\underline{\triangle SOB}$; $OB=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=l^2-h^2$$

$$a^2=3(l^2-h^2)$$

$$a=\sqrt{3(l+h)(l-h)}$$

$\underline{\triangle SDB}$; $SD=b$

$$b^2=l^2-\frac{a^2}{4}$$

$$b=\frac{1}{2}\sqrt{(2l+a)(2l-a)}$$

$$S_{полн}=\frac{3}{4}\sqrt{3(l+a)(l-a)}\left[\sqrt{(2l+a)(2l-a)}+\sqrt{(l+h)(l-h)}\right] \text{ кв. ед.}$$

Учащиеся могли бы пойти и иным путем, а именно — рассматривая треугольники SOD и SBD; тогда получились бы два уравнения с двумя неизвестными. Этот путь несколько сложнее, но в конечном итоге приводит к тому же результату.

7. Делается набросок изображения треугольной пирамиды и в ней проводится высота (рис. 247); записывается формула полной поверхности пирамиды.

$$S_{полн}=\text{пл. } ASB+\text{пл. } BSC+\text{пл. } CSA+\text{пл. } ABC.$$

Вычисляются апофемы SA_1, SB_1 и SC_1 боковых граней:

$$SA_1=\sqrt{l^2+h^2};\ SB_1=\sqrt{m^2+h^2};\ SC_1=\sqrt{n^2+h^2}.$$

Итак,

$$S_{полн}=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{l^2+h^2}+b\sqrt{m^2+h^2}+c\sqrt{n^2+h^2}\right)+\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ кв. ед.}$$

Задача решена. Интересно указать, что условие задачи позволяет установить, с одной стороны, зависимость между a, b и c, с другой — зависимость между l, m и n. В самом деле, если соединить основание высоты O с вершинами A, B и C треугольника, то получим:

$$\text{пл. } ABC = \frac{1}{2}\left(al + bm + cn\right)$$

и тогда

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2}\left(al + bm + cn\right).$$

Последнее равенство показывает, что если даны два из отрезков l, m и n, то третий этим равенством вполне определяется. Это значит, что если даны, положим, l и m, то отрезок n не может быть произвольным, он должен быть определенной длины, чтобы удовлетворить написанному условию.

Можно это условие истолковать и так: если даны отрезки l, m и n и, кроме того, отрезки a и b, две стороны треугольника, то третья сторона треугольника

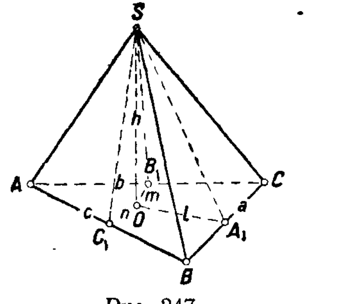


Рис. 247.

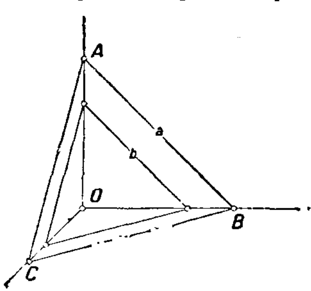


Рис. 248.

определится этим же равенством. Одним словом, из шести отрезков: a, b, c, l, m и n один зависит от остальных и потому является лишним данным в условии задачи.

8. Согласно условию задачи, сечение — правильный треугольник, а потому отрезки OA, OB и OC на ребрах трехгранного угла, считая от вершины O, равны, $OA = OB = OC$ (рис. 248).

Обозначив каждый из них через x, находим x из любого треугольника — AOB, AOC или BOC:

$$x^2 + x^2 = a^2 \text{ и } x^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Площадь каждого из треугольников равна $\frac{x^2}{2}$ или $\frac{a^2}{4}$, а потому

$$S_{\text{полн}} = 3\cdot\frac{a^2}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{4}(3+\sqrt{3}) \text{ кв. ед.}$$

Данную задачу можно решить иначе. Обозначив площадь каждого из треугольников через Q, имеем:

$$Q^2 + Q^2 + Q^2 = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)^2,$$

откуда

$$Q^2 = \frac{a^4}{16} \text{ и } Q = \frac{a^2}{4}$$

и

$$S_{\text{полн}} = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{4}(3+\sqrt{3}) \text{ кв. ед.}$$

9. На основании выкладок предыдущей задачи находим, что площадь каждой боковой грани усеченной пирамиды (рис. 248) равна

$$\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}=\frac{a^2-b^2}{4},$$

а потому

$$S_{\text{полн}}=\frac{3}{4}(a^2-b^2)+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}\left[3(a+b)(a-b)+(a^2+b^2)\sqrt{3}\right] \text{ кв. ед.}$$

10. Поверхность октаэдра равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot 8=2a^2\sqrt{3}$ кв. ед. Ребро полученного тетраэдра равно $2a$, следовательно, его поверхность равна $\frac{4a^2\sqrt{3}}{4}\cdot 3=3a^2\sqrt{3}$ кв. ед. Находим отношение поверхностей октаэдра и тетраэдра, оно равно:

$$2a^2\sqrt{3}:3a^2\sqrt{3}=2:3.$$

11. Обозначив ребра куба через a, находим: ребро октаэдра равно $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, его поверхность равна $\frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}\cdot 8=\frac{2a^2\sqrt{3}\cdot 8}{4\cdot 4}=a^2\sqrt{3}$, поверхность куба равна $6a^2$. Следовательно, $S_8:S_6=a^2\sqrt{3}:6a^2=\sqrt{3}:6$ или $S_8:m^2=\sqrt{3}:6$, откуда $S_8=$ $=\frac{m^2\sqrt{3}}{6}$ кв. ед.

S_6 и S_8 — обозначения поверхностей куба (гексаэдра) и октаэдра.

12. Обозначим расстояние первого параллельного сечения от вершины через x_1. Отсеченная пирамида подобна данной; поверхности данной и ей подобной пирамиды относятся, как квадраты сходственных ребер или высот, следовательно

$$\frac{S}{\frac{S}{n}}=\frac{H^2}{x_1^2}, \text{ откуда } x_1=H\sqrt{\frac{1}{n}}.$$

Так же находим:

$$\frac{S}{\frac{2S}{n}}=\frac{H^2}{x_2^2}, \text{ откуда } x_2=H\sqrt{\frac{2}{n}} \text{ и т. д.}$$

$$\frac{S}{\frac{(n-1)S}{n}}=\frac{H^2}{x_{n-1}^2}, \text{ откуда } x_{n-1}=H\sqrt{\frac{n-1}{n}}.$$

ГЛАВА X.

ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ.

§ 52. Объем призм.

1. При вычислении объема призмы обычно пользуются двумя путями: один из них основан на преобразовании прямых и наклонных параллелепипедов в равносоставленные, а также и вообще наклонных призм в равносоставленные прямые призмы, другой основан на теореме Кавальери. В планиметрии, как известно, две равновеликие плоские прямолинейные фигуры могут быть разложены на одинаковое конечное число конгруентных частей, т. е. многоугольники равновеликие суть равносоставленные.

Попытки доказать, что равновеликие многогранники суть равносоставленные фигуры, за исключением некоторых частных случаев, оказались напрасными.

Гильберт в 1900 г. указал на 23 еще нерешенные проблемы в геометрии; среди них была им указана отмеченная выше проблема; при этом Гильберт высказал предположение, что она, быть может, и не разрешима. И, действительно, в том же году Дэн доказал, что многогранники, могущие быть преобразованными один в другой путем разложения или дополнения, должны удовлетворять условию, заключающемуся в следующем. Если a_1, a_2, $a_3 \ldots a_m$ суть двугранные углы одного многогранника, а β_1, β_2, $\beta_3 \ldots \beta_n$ — двугранные углы второго многогранника, выраженные в частях прямого угла, то существуют такие целые положительные числа A_1, $A_2 \ldots A_m$ и B_1, $B_2 \ldots B_n$ и такое целое (положительное или отрицательное) число k, что

$$(A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_m a_m) - (B_1 \beta_1 + B_2 \beta_2 + \ldots + B_n \beta_n) = 2kd.$$

А так как можно показать, что существуют многогранники с двугранными углами, не удовлетворяющими выведенному соотношению Дэна, то тем самым показано, что в стереометрии не существует теоремы: равновеликие многогранники суть равносоставленные фигуры.

Отсюда следует, что лемму о равновеликости пирамид с равновеликими основаниями и равными высотами доказать на основе идеи равносоставленности, вообще говоря, нельзя: приходится прибегать к явному или скрытому методу бесконечно-малых и теории пределов. Вот почему на второй путь, основанный на теореме Кавальери, возложена надежда многих методистов.

Объем призм.

2. Приступим к изложению объема призм на основе идеи равносоставленности.

Подходя к рассмотрению темы „объемы многогранников“, надлежит разъяснить учащимся, что значит и з м е р и т ь о б ъ е м т е л а. Учащимися должно быть твердо усвоено, что измерить объем тела — значит сравнить его с другим телом, объем которого принят за единицу; вместе с тем они должны знать, что за единицу измерения объема тела принимается куб, ребро которого равно какой-нибудь единице длины. Также должно быть разъяснено учащимся, что о б ъ е м о м тела называется ч и с л о, указывающее, сколько раз принятая единица объема или ее часть содержится в данном теле.

Уяснение всех этих понятий не представляет для учащихся каких-либо затруднений. Уже в начальной школе они пользовались непосредственным измерением, заполняя ящик, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда или куба, кубиками одинакового размера.

Некоторое внимание следует уделить вопросу о прямом и косвенном измерении.

Не должна быть упущена возможность повторить с учащимися кубические меры и действия с ними, должен быть решен ряд примеров на раздробление и превращение кубических мер одного наименования в кубические меры другого наименования.

После повторения перечисленного материала следует указать учащимся, что формула объема прямоугольного параллелепипеда, которую они добыли в начальной школе опытным путем, должна быть выведена при помощи цепи логических рассуждений. Доказывается теорема: **объем**

прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений. Должны быть рассмотрены три случая: измерения (при одной и той же единице) ребер m, n и p прямоугольного параллелепипеда 1) целые числа, 2) дробные числа и 3) иррациональные числа.

I. Пусть ребра прямоугольного параллелепипеда выражены целыми числами m, n и p. Сечениями, параллельными и перпендикулярными к плоскостям оснований прямоугольного параллелепипеда, последний разбивается сначала на m слоев, толщиной в единицу линейной меры, затем каждый из m слоев на n брусков, ширина и высота которых равна единице линейной меры, и, наконец, каждый брусок — на p кубов, каждое ребро которых равно единице длины. Таким образом, находят, что

$$V = m \cdot n \cdot p \text{ куб. ед.}$$

II. Затем рассматривается вычисление объема прямоугольного параллелепипеда, ребра которого выражены дробными числами. Указывается, что в данном случае нужно привести дроби, выражающие измерения прямоугольного параллелепипеда, к общему знаменателю, положим, к знаменателю q, и разбить параллелепипед приемом, указанным выше, на кубы, каждое ребро которых равно $\frac{1}{q}$ единицы длины.

Если ребра параллелепипеда $m = \frac{m_1}{q}$; $n = \frac{n_1}{q}$; $p = \frac{r_1}{q}$, то $V = m_1 \cdot n_1 \cdot p_1 = mq \cdot nq \cdot pq$ (куб. ед. с ребром, равным $\frac{1}{q}$) $= (m \cdot n \cdot p)(q^3)$ [куб. ед. с ребром, равным $\frac{1}{q}$] $= m \cdot n \cdot p$ (куб. ед. с ребром, равным 1), так как в кубе с ребром, равным 1, куб с ребром, равным $\frac{1}{q}$, содержится q^3 раз (на основании первого случая).

III. Наконец, вычисляется объем прямоугольного параллелепипеда, если одно, два или все три его ребра несоизмеримы с единицей, т. е. их мерой являются иррациональные числа.

Доказательство. Пусть числа, измеряющие ребра параллелепипеда, будут m, p и q, при этом некоторые из них или все три — числа иррациональные.

Обозначим объем параллелепипеда через V и докажем, что объем V параллелепипеда равен произведению чисел m, p и q, т. е. $V = m \cdot p \cdot q$.

Доказательство проведем способом от противного. Можно сделать три допущения: либо произведение чисел $m \cdot p \cdot q$ меньше объема V параллелепипеда, либо больше, либо равно.

Рассмотрим первое допущение. Допустим, что $m \cdot p \cdot q < V$. Всегда можно подобрать такие рациональные числа больше иррациональных, что разность между ними будет как угодно малой. Пусть рациональные числа $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n}$, $\frac{c}{n}$ таковы, что $m < \frac{a}{n}$, $p < \frac{b}{n}$ и $q < \frac{c}{n}$ и соответствующие разности между ними бесконечно-малы.

Если имеют место вышеприведенные неравенства, то, перемножая соответствующие их части, получим: $m \cdot p \cdot q < \frac{abc}{n^3}$. Но разность между каждыми двумя соответствующими компонентами m и $\frac{a}{n}$, p и $\frac{b}{n}$, q и $\frac{c}{n}$

бесконечно-мала, а потому и разность между произведениями mpq и $\frac{abc}{n^3}$ бесконечно-мала.

Действительно, $\frac{a}{n}=m+\varepsilon_1$, $\frac{b}{n}=p+\varepsilon_2$, $\frac{c}{n}=q+\varepsilon_3$, где ε_1, ε_2 и ε_3 — бесконечно-малые числа; перемножая левые и правые части последних равенств, имеем:

$$\frac{abc}{n^3}=(m+\varepsilon_1)(p+\varepsilon_2)(q+\varepsilon_3)=$$
$$=mpq+(pq\varepsilon_1+mq\varepsilon_2+q\varepsilon_1\varepsilon_2+mp\varepsilon_3+p\varepsilon_1\varepsilon_3+m\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3),$$

откуда заключаем, что разность между $\frac{abc}{n^3}$ и mpq — величина бесконечно-малая, так как все семь слагаемых, заключенные в скобки, бесконечно-малые и число их конечно.

С другой стороны, как объем V параллелепипеда, так и произведение mpq — числа постоянные, значит, разность между ними есть неизвестное постоянное число.

Итак, соответственные разности будут:

$$\frac{abc}{n^3}-mpq=\text{бесконечно-малое число},$$
$$V-mpq=\text{постоянное число},$$

откуда $V-mpq>\frac{abc}{n^3}-mpq$ или $V>\frac{abc}{n^3}$.

Переводя на геометрические образы последние соотношения, мы должны отметить, что существует параллелепипед с ребрами $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n}$, $\frac{c}{n}$, который обьемлет заданный параллелепипед с ребрами m, p, q и в то же время имеет объем $\frac{abc}{n^3}$, меньший заданного V; это противоречиво, так как тело, заключенное внутри другого, имеет и обьем меньший.

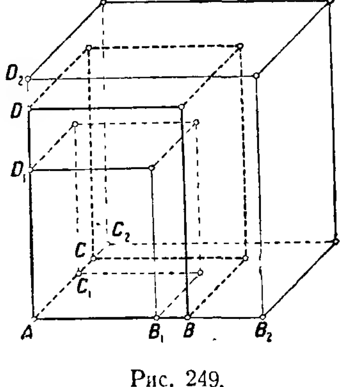


Рис. 249.

Так же доказывается, что и второе допущение, что $mpq>V$, приводит к противоречивости.

Отсюда вытекает, что возможно только третье допущение, а именно, что $V=mpq$.

Необходимо указать, что приведенное доказательство неполно, так как не вскрыто, что каждый параллелепипед, вообще многогранник, можно поставить в однозначное соответствие с действительными числами; эти числа имеют между собою соотношения в зависимости от определенных соотношений многогранников; так, в частности, если многогранник A находится целиком внутри многогранника B, то между соответствующими им числами a и b будет существовать соотношение $a<b$ и пр.

Нужно отметить, что приведенное доказательство не рекомендуется ставить в школе при первом знакомстве в систематическом курсе стереометрии с вычислением объема параллелепипеда, с ним можно ознакомить

учащихся при повторении курса стереометрии **в последнем** классе и на кружковых занятиях.

При первом знакомстве в систематическом курсе стереометрии с вычислением объема параллелепипеда целесообразно либо опустить доказательство в связи с несоизмеримостью ребер параллелепипеда, либо дать еще более не трогое и неполное доказательство, приводимое ниже.

Пусть дан прямоугольный параллелепипед (рис. 249), измерения которого $AB=m$, $AC=n$, $AD=p$, где или все числа или только некоторые из них иррациональные. Если m, n, p — числа иррациональные, то пусть их приближенные значения с точностью до $\frac{1}{q}$ заключены между пределами:

$$\frac{a}{q}<m<\frac{a+1}{q}, \text{ где } \frac{a}{q}=AB_1 \text{ и } \frac{a+1}{q}=AB_2,$$

$$\frac{b}{q}<n<\frac{b+1}{q}, \text{ где } \frac{b}{q}=AC_1 \text{ и } \frac{b+1}{q}=AC_2,$$

$$\frac{c}{q}<p<\frac{c+1}{q}, \text{ где } \frac{c}{q}=AD_1 \text{ и } \frac{c+1}{q}=AD_2.$$

Если построить прямоугольный параллелепипед, измерения которого AB_1, AC_1 и AD_1, то его объем

$$V_1=\frac{a}{q}\cdot\frac{b}{q}\cdot\frac{c}{q}=\frac{a\cdot b\cdot c}{q^3}.$$

Если построить прямоугольный параллелепипед, измерения которого AB_2, AC_2 и AD_2, то его объем

$$V_2=\frac{a+1}{q}\cdot\frac{b+1}{q}\cdot\frac{c+1}{q}=\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{q^3}.$$

Если принять объем данного прямоугольного параллелепипеда равным V, то очевидно, что

$$V_1<V<V_2,$$

так как V_1 составляет часть V, а V — часть V_2.

С другой стороны, имеем:

$$\frac{abc}{q^3}<V<\frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{q^3}.$$

Чем больше будет взято q, тем ближе будут верхние и нижние границы между собой, и разность между ними может быть сделана меньше любой наперед заданной весьма малой положительной величины ε.

Понятно, что разность между V и его границами подавно будет меньше ε, а потому число V, измеряющее объем данного прямоугольного параллелепипеда, должно быть больше произведения любых приближенных значений чисел m, n, p, взятых с недостатком, и меньше произведения любых приближенных значений чисел m, n, p, взятых с избытком. Такое число есть произведение иррациональных чисел m, n, p по определению понятия умножения иррациональных чисел. Отсюда заключаем, что $V=m\cdot n\cdot p$.

Итак, какими бы числами: целыми, дробными или иррациональными, ни измерялись ребра m, n и p прямоугольного параллелепипеда, **объем**

прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений:

$$V = m \cdot n \cdot p. \text{ куб. ед.}$$

Выведенную формулу нужно представить в таком виде:

$$V = (m \cdot n)\, p = (m \cdot p)\, n = (n \cdot p)\, m$$

или

$$V = Q_1 H_1 = Q_2 H_2 = Q_3 H_3,$$

где буквой Q обозначена площадь основания и буквой H — соответствующая высота прямоугольного параллелепипеда.

Кроме указанного существует еще прием вычисления объема прямоугольного параллелепипеда; он состоит в следующем. Сперва рассматриваются два прямоугольных параллелепипеда с равными основаниями и различными высотами и доказывается, что их объемы V_1 и V_2 относятся, как их высоты, как в том случае, когда их высоты соизмеримы, так и в том случае, когда их высоты несоизмеримы. Так, в случае соизмеримости их высот оба параллелепипеда разбиваются плоскостями, параллельными основаниям, на одинаковое число равных параллелепипедов, и их обьемы относятся, как их высоты:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{H_1}{H_2}.$$

Затем рассматриваются два прямоугольных параллелепипеда, имеющих равные высоты и разные основания; измерения одного параллелепипеда a, b и c (I), другого — a_1, b_1 и c_1 (II); доказывается, что их объемы относятся, как площади их оснований. Для проведения доказательства вводится третий вспомогательный параллелепипед, размеры которого a, b_1 и c (III). Сопоставляя обьемы данных параллелепипедов и вспомогательного, на основании выше рассмотренного случая находим:

$$V_I : V_{III} = b : b_1,$$
$$V_{III} : V_{II} = a : a_1.$$

Перемножая почленно полученные равенства, имеем:

$$V_I : V_{II} = \frac{ab}{a_1 b_1}.$$

Наконец, рассматриваются два прямоугольных параллелепипеда, измерения которых a_1, b_1 и c_1 и a_2, b_2 и c_2, и третий — вспомогательного измерения которого a_1, b_1 и c_2.
Тогда

$V_1 : V_3 = c_1 : c_2$ на основании первой теоремы
$V_3 : V_2 = a_1 b_1 : a_2 b_2$ „ „ второй „

Умножая почленно последние два равенства, находим:

$$V_1 : V_2 = a_1 b_1 c_1 : a_2 b_2 c_2,$$

т. е. **объемы двух прямоугольных параллелепипедов относятся, как произведения трех их измерений.**

После этого рассматривается прямоугольный параллелепипед, измерения которого a, b и c, и куб с ребром, равным 1 — единице измерения,

который и принимается за единицу объема. На основании предыдущих рассуждений находим: $\frac{V}{1^3} = \frac{abc}{1 \cdot 1 \cdot 1}$ или $V = abc$ (куб. ед.).

Итак, объем прямоугольного параллелепипеда, выраженный в кубических единицах, равен произведению трех его измерений, выраженных в линейных единицах того же наименования.

Приведенное доказательство аналогично доказательству, которое дано в первой части настоящей книги при выводе формулы площади прямоугольника (ч. 1, стр. 241—242).

Задача. Вычислить вес воздуха в комнате длиной 7,5 *м*, шириной 5,5 *м* и высотой 3,2 *м*. Удельный вес сухого воздуха $\delta = 0{,}0013$.

Решение. Вес $P = \delta V$.

$$V = 7{,}5 \cdot 5{,}5 \cdot 3{,}2 = 132 \text{ м}^3.$$
$$P = 0{,}0013 \cdot 132 = 0{,}1716 \; m \approx 0{,}17 \; m.$$

Подобного рода задачи весьма полезны; учащиеся обычно не имеют достаточно ясного представления о весе воздуха, взятого в том или ином объеме.

3. Для вывода дальнейшего следует остановиться на теореме: **прямоугольный параллелепипед диагональным сечением делится на две конгруентные треугольные прямые призмы, основаниями которых служат прямоугольные треугольники.**

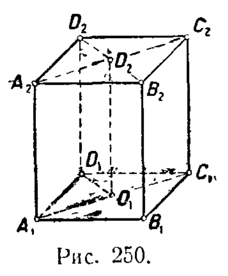


Рис. 250.

Призму $B_1C_1D_1B_2C_2D_2$ (рис. 250) поворачивают вокруг оси O_1O_2 параллелепипеда на 180°; тогда ребро B_2B_1 совпадет с ребром D_2D_1, ребро C_2C_1 с ребром A_2A_1, и призма $B_1C_1D_1B_2C_2D_2$ совместится с призмой $A_1B_1D_1A_2B_2D_2$; это значит, что объем одной призмы равен объему другой.

Итак, если m, n и p — ребра прямоугольного параллелепипеда, то объем его $V = m \cdot n \cdot p = Q \cdot H$. С другой стороны, $V_{\text{пр}} = \frac{1}{2} mnp = \left(\frac{1}{2} mn\right) p = \text{пл. } A_1B_1C_1 \cdot H = Q_1 \cdot H$; и в данном случае объем прямой треугольной призмы, основание которой прямоугольный треугольник, равен произведению площади ее основания Q_1 на высоту H. Следует затем показать, что объем прямой треугольной призмы, основанием которой не является прямоугольный треугольник, также равен произведению площади ее основания Q на высоту H, откуда легко получить объем прямой многоугольной призмы путем разбивки на прямые треугольные призмы и соответствующего суммирования их объемов, как это сделано в стабильном учебнике. Итак,

объем любого прямого параллелепипеда, а следовательно, **любой прямой призмы, равен произведению площади основания призмы на высоту:**

$$V = Q \cdot H \text{ куб. ед.}$$

4. Этот раздел, поскольку учащиеся уже знакомы с вычислением объемов прямых призм, часто не представляет для них особого интереса, поэтому следует оживить его рассмотрением некоторых интересных вопросов, связанных с вычислением объемов, подчеркнув одновременно различие между понятиями: объем и поверхность тела.

Задача 1. Деревянный дециметровый куб, каждое ребро которого равно одному дециметру, окрашен в черный цвет и затем разрезан параллельно граням на сантиметровые кубики. Сколько среди них имеется кубиков с одной черной гранью, с двумя, тремя, четырьмя и т. д. черными гранями, и сколько кубиков, не имеющих ни одной черной грани?

Вопрос этот обычно вызывает значительный интерес у учащихся. Задача эта несложна, однако весьма часто учащиеся дают ответы неправильные. Для выяснения вопроса следует начать с учета кубиков, ни одна из граней которых не окрашена в черный цвет. Выясняется, что дециметровый куб разбивается на 1000 сантиметровых кубиков, что куб окрашен только снаружи, т. е. по его поверхности, а потому окрашенные в черный цвет грани могут быть только у кубиков, составляющих наружный слой дециметрового куба. Таким образом, наружный слой куба ограничивает другой куб, ребро которого равно $10-2=$ $=8$ *см*, следовательно, число неокрашенных кубиков равно $8\cdot8\cdot8=512$. Рассмотрим кубики, расположенные в вершинах дециметрового куба; эти кубики имеют по три окрашенные в черный цвет грани, их 8, что соответствует числу вершин куба. Кроме того, все кубики, ребра которых совпадают с ребрами куба, за исключением расположенных в вершинах куба, имеют по две окрашенных грани; таких кубиков у каждого ребра по 8, следовательно, всего их $8\cdot12=96$. Остается учесть еще кубики, только одна грань которых окрашена в черный цвет; таких кубиков на каждой грани $8\cdot8=64$, а всего $64\cdot6=384$. Кубиков с четырьмя окрашенными гранями нет. Итак, имеем:

неокрашенных кубиков	512	
с одной окрашенной гранью	384	
с двумя окрашенными гранями	96	
с тремя окрашенными гранями	8	
Всего	1000	кубиков

Этой задачей следует воспользоваться для решения вопросов: 1) во сколько раз объем всех 1000 кубиков больше объема всего дециметрового куба и 2) во сколько раз поверхность всех 1000 кубиков больше поверхности всего куба?

Объем куба равен 1000 *см*³; куб разбивается на 1000 кубиков, и их объем также равен 1000 *см*³, следовательно, объем дециметрового куба и 1000 сантиметровых кубиков один и тот же.

Поверхность каждого кубика равна 6 *см*² и поверхность всех 1000 кубиков равна 6000 *см*², поверхность же дециметрового куба равна $6\cdot100$ *см*², следовательно, поверхность 1000 кубиков, составляющих дециметровый куб, в $\frac{6000}{600}=$ $=10$ раз больше поверхности куба.

Следует указать, что в технике для получения большей эффективности распыляют горючее, чем и увеличивается эффективность горения, так как увеличивается площадь нагрева. Закон этот используется также и в биологии.

Задача 2. Измерения прямоугольного параллелепипеда выражаются целыми числами, объем его равен 64 *см*³; каковы должны быть измерения параллелепипеда, чтобы поверхность его была наименьшей?

Разлагаем число 64 на три всевозможных множителя a, b и c, где a, b и c — целые числа, соответствующие трем измерениям параллелепипеда. Находим:

Объем V	Измерения $a\cdot b\cdot c$	Поверхность $S_n=2(a+b)\cdot c+2ab$
64	$=1\cdot1\cdot64$	258
64	$=1\cdot2\cdot32$	196
64	$=1\cdot4\cdot16$	168
64	$=1\cdot8\cdot8$	160
64	$=2\cdot2\cdot16$	136
64	$=2\cdot4\cdot8$	112
64	$=4\cdot4\cdot4$	96

Итак, из всех рассмотренных равновеликих прямоугольных параллелепипедов наименьшая поверхность у параллелепипеда, ребра которого равны; такой параллелепипед — куб. Более подробный анализ приводит к такому же выводу.

Разобранная задача значительно подводит к решению практических задач. Если, например, требуется вырыть погреб, объем которого равен 64 $м^3$, то выгоднее всего придать ему форму куба с ребром в 4 *м*, так как площадь его нагрева — наименьшая из всех возможных равновеликих прямоугольных параллелепипедов.

Необходимо иметь в виду, что при решении данной задачи не учитывался ряд факторов, влияющих на получение результата, вполне соответствующего действительности, например степень неравномерного нагревания стен погреба и пр.

Интересно задать учащимся и такую задачу: у какого из всех прямоугольных параллелепипедов, в том числе и куба, с одной и той же полной поверхностью, равной, положим, 216 $м^2$, наименьший объем, если известно, что все ребра берутся в целых числах?

Отмечаем, что условие: все ребра берутся в целых числах, добавлено в целях упрощения вычислений.

Задача 3. Ребро куба равно 6 *м*. Найти его полную поверхность и его объем.

Вычисления дают $S_n = 216$ $м^2$ и $V = 216$ $м^3$. Цель задачи — обратить внимание учащихся на наименование результата. Следует добиться, чтобы учащиеся четко уяснили себе, что поверхность выражается в квадратных метрах, объем — в кубических метрах.

Задача 4. Построить куб, объем которого вдвое больше объема данного куба, ребро которого равно *a*.

Данная задача является одной из знаменитых задач древности и называется задачей „об удвоении куба" или „делийской задачей".

Приводим аналитическое решение задачи. Пусть ребро искомого куба будет x, тогда объем V куба равен x^3, $V = x^3$; этот объем, согласно условию, равен $2a^3$, следовательно, $x^3 = 2a^3$; решаем кубическое уравнение $x^3 - 2a^3 = 0$ и останавливаемся на действительном корне $x = a\sqrt[3]{2}$; другие два корня, как мнимые, не принимаем во внимание.

Итак, для построения ребра x куба надо построить кубичный корень из двух.

Греки, считавшие, что „настоящее" решение задачи на построение допускает только применение циркуля и линейки, в течение долгого времени напрасно искали решение данной задачи при помощи указанных чертежных инструментов. Это и понятно, так как ими, как теперь строго доказано, могут быть построены только такие отрезки, которые выражаются через данные или рационально, или при помощи конечного числа корней, и притом только квадратных.

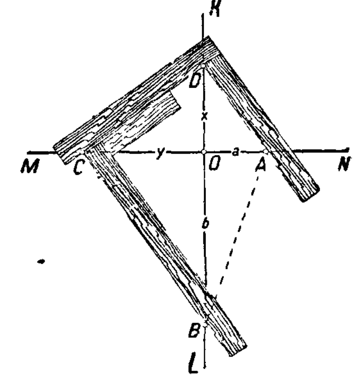


Рис. 251.

Следует отметить, что усилия греков найти решение данной задачи и ряда других задач, которые неразрешимы циркулем и линейкой, привели их к весьма плодотворным открытиям. Так, решение делийской задачи Менехм (около IV в. до н. э.) дал при помощи двух парабол, Аполлоний (около 200 лет до н. э.) — при помощи параболы и круга, Никомед (около 150 лет до н. э.) — при помощи специально им придуманной кривой — так называемой конхоиды, Диоклес (около 150 лет до н. э.) — с помощью циссоиды, и т. д.

Приводим древнейшее, повидимому, решение делийской задачи, которое, согласно свидетельству Евдокса, приписывается Платону; это решение выполняется двумя угольниками методом так называемой „подвижной" геометрии, согласно которому перемещением угольников находится путем проб определенная точка пересечения двух прямых.

Пусть MN и KL — две взаимно перпендикулярные прямые (рис. 251). Откладывают на них от общей их точки O отрезки $OA = a$ и $OB = b$, затем накладывают на прямые два угольника так, как показано на рисунке, и добиваются перемещением угольников такого их расположения, при котором угольники соприкасались бы вдоль одного из их катетов, второй катет одного проходил бы через точку A, а катет другого — через точку B, и, наконец, вершина одного угольника лежала бы на прямой MN, другого же — на прямой KL. Если принять затем отрезок $OD = x$ и отрезок $OC = y$, то легко установить из свойств перпендикуляра, проведенного из вершины прямого угла на гипотенузу, что четыре отрезка a, b, x и y связаны соотношением:

$$a:x = x:y = y:b.$$

Для решения делийской задачи, где x — искомое ребро куба, следует взять $b = 2a$, и тогда $x^3 = 2a^3$ или $x = a\sqrt[3]{2}$, что следует из следующих соображений:

$$a:x = a:x,$$
$$a:x = x:y,$$
$$a:x = y:2a.$$

После почленного перемножения равенств имеем: $a^3:x^3 = axy:2axy$ или $a^3:x^3 = 1:2$, так как $b = 2a$, и, наконец, $x^3 = 2a^3$, откуда $x = a\sqrt[3]{2}$.

5. Прежде чем непосредственно перейти к выводу формулы объема наклонной призмы, следует напомнить учащимся, как вычисляется в планиметрии площадь параллелограма. Как в планиметрии косоугольный параллелограм превращается в равновеликий прямоугольный параллелограм, так в стереометрии наклонный параллелепипед, соответствующий косоугольному параллелограму, превращается в равновеликую прямую призму. Вывод формулы объема наклонной призмы не представляет затруднений; он достаточно подробно разобран в стабильном учебнике.

Объем наклонной призмы равен произведению площади ее перпендикулярного сечения $Q_{\perp}$ на ребро l:

$$V = Q_{\perp} \cdot l \text{ куб. ед.}$$

Задача. Ребро наклонного параллелепипеда равно a; к нему примыкают две смежные грани, площади которых соответственно равны m^2 и n^2 и их плоскости образуют угол $\alpha = 30°$. Вычислить объем параллелепипеда.

Для вычисления объема наклонного параллелепипеда надо знать перпендикулярное сечение и боковое ребро его. Перпендикулярное сечение данного параллелепипеда — параллелограм, острый угол которого равен 30°.

Итак, $V = Q_{\perp} \cdot l$, где $Q_{\perp}$ — площадь параллелограма и l — боковое ребро. Обозначим стороны параллелограма, площадь которого $Q_{\perp}$, через x и y; высота указанного параллелограма равна $\frac{y}{2}$ $\left(\text{или } \frac{x}{2}\right)$, как катет, лежащий против угла в 30°, а потому

$$Q_{\perp} = \frac{xy}{2} \text{ кв. ед. и } V = \frac{xy}{2} \cdot a \text{ куб. ед.}$$

Задача, как видим, сводится к вычислению произведения xy.

Стороны параллелограма сечения являются высотами параллелограмов боковых граней параллелепипеда, а потому, согласно условию задачи,

$$ax = m^2,$$
$$ay = n^2,$$

откуда

$$a^2xy = m^2n^2 \quad \text{и} \quad xy = \frac{m^2n^2}{a^2},$$

а потому

$$V = \frac{m^2n^2}{2a^2} \cdot a = \frac{m^2n^2}{2a} \text{ куб. ед.}$$

Отношение объемов призм.

6. Желательно остановиться на нахождении отношения объемов призм и рассмотреть случаи, когда призмы имеют: 1) неравновеликие основания и неравные высоты, 2) равновеликие основания, но неравные высоты и 3) равные высоты, но неравновеликие основания.

Кроме того, следует найти и отношение объемов подобных призм.

Пусть V_1 и V_2 — объемы двух призм; Q_1 и Q_2, H_1 и H_2 — соответствующие им основания и высоты.

Находим отношение их объемов:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{Q_1H_1}{Q_2H_2}.$$

Если $Q_1=Q_2$ или $H_1=H_2$, то

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{H_1}{H_2} \quad \text{или} \quad \frac{V_1}{V_2}=\frac{Q_1}{Q_2}.$$

Понятно, что учащиеся должны уметь дать надлежащую формулировку написанных равенств.

Если две призмы подобны, то

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\ldots=\frac{l_1}{l_2}=\frac{H_1}{H_2} \quad \text{и} \quad \frac{Q_1}{Q_2}=\frac{a_1^2}{a_2^2}=\frac{b_1^2}{b_2^2}=\ldots=\frac{l_1^2}{l_2^2}=\frac{H_1^2}{H_2^2},$$

а потому, если призмы подобны, то

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{Q_1}{Q_2}\cdot\frac{H_1}{H_2}=\frac{H_1^3}{H_2^3}=\frac{a_1^3}{a_2^3}=\ldots=\frac{l_1^3}{l_2^3}=\frac{Q_1^{\frac{3}{2}}}{Q_2^{\frac{3}{2}}}.$$

Итак, **объемы двух подобных призм относятся, как кубы их соответствующих линейных элементов или как квадратные корни из кубов площадей их оснований.**

Задачи и вопросы.

1. Разность ребер двух кубов равна a, разность их объемов равна m^3. Найти ребра данных кубов.

2. Объем призмы, основанием которой служит трапеция, равен произведению среднего арифметического площадей параллельных граней на расстояние между ними. Доказать.

3. Диагональ правильной четырехугольной призмы d образует с прилежащей стороной основания угол $\alpha=60^\circ$. Найти объем призмы.

4. В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней равна m^2, а расстояние ее от противолежащего ребра равно a. Найти объем призмы.

5. Площадь основания прямой треугольной призмы равна l^2; площади боковых граней равны m^2, n^2 и p^2. Найти объем призмы.

Указания к задачам и вопросам.

1. Обозначив ребра кубов через x и $x+a$, имеем, согласно условию задачи: $(x+a)^3-x^3=m^3$. Решая данное уравнение, находим:

$$3ax^2+3a^2x+a^3=m^3$$

или

$$3ax^2+3a^2x+(a^3-m^3)=0$$

и

$$x=\frac{-3a^2\pm\sqrt{9a^4-12a(a^3-m^3)}}{6a}.$$

Отбрасывая отрицательное решение, имеем:

$$x=\frac{-3a^2+\sqrt{12am^3-3a^4}}{6a}.$$

Анализ решения показывает, что задача невозможна, если $12am^3-3a^4<0$ следовательно, при $12am^3<3a^4$ или $4m^3<a^3$ или $a>m\sqrt[3]{4}$ задача не имеет решения. Точно так же задача не имеет решений, если $12am^3-3a^4=0$ или $a^3=4m^3$, ибо при этом условии x — число отрицательное.

Итак, чтобы задача имела решение, необходимо, чтобы $\sqrt{12am^3-3a^4}\geq 3a^2$, или $12am^3-3a^4\geq 9a^4$, или $12am^3\geq 12a^4$, или $m^3\geq a^3$ и $m\geq a$.

В том случае, когда $m=a$, измерение одного из кубов равно нулю.

2. Следует провести сечение, перпендикулярное к боковому ребру призмы; это сечение — трапеция. Обозначив параллельные стороны сечения через x и y, находим, что $Q_{\perp}=\frac{x+y}{2}\cdot h$, где h — расстояние между параллельными гранями призмы, следовательно, и высота трапеции, полученной в сечении. Но $V=Q_{\perp}\cdot l$, а потому

$$V=\frac{x+y}{2}\cdot h\cdot l=\frac{xl+yl}{2}\cdot h \text{ куб. ед.},$$

где xl — площадь одной из параллельных граней, yl — площадь другой параллельной грани и $\frac{xl+yl}{2}$ — среднее арифметическое площадей параллельных граней Итак, предложение доказано.

3. Чтобы вычислить $V=QH$, надо найти и Q — площадь квадрата основания, и H — высоту призмы. Согласно условию, в прямоугольном треугольнике AD_1B

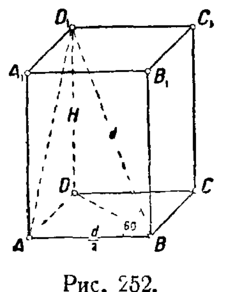


Рис. 252.

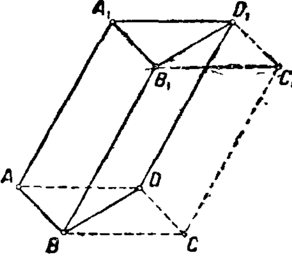


Рис. 253.

(рис. 252) сторона основания $AB=x$ лежит против угла в 30°, следовательно, $x=\frac{d}{2}$; отсюда находим, что $Q=x^2=\frac{d^2}{4}$. Высоту H находим из треугольника $D_1DB: H^2=d^2-2x^2$, где $2x^2$ — диагональ основания, или

$$H^2=d^2-\frac{d^2}{2}=\frac{d^2}{2} \quad \text{и} \quad H=\frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

Итак,

$$V=QH=\frac{d^2}{4}\cdot\frac{d\sqrt{2}}{2}=\frac{d^3\sqrt{2}}{8} \text{ куб. ед.}$$

4. Наклонную треугольную призму следует дополнить до параллелепипеда (рис. 253). Приняв грань BB_1C_1C за основание, находим:

$$V=\frac{1}{2}QH=\frac{m^2a}{2} \text{ куб. ед.},$$

так как, согласно условию задачи, площадь основания параллелепипеда равна m^2, а высота — расстояние основания от ребра AA_1 — равна a; объем же призмы составляет половину объема параллелепипеда.

5. Объем призмы $V = QH = l^2H$ куб. ед.

Обозначив стороны основания через x, y и z, имеем:

$$xH = m^2, \quad yH = n^2 \quad \text{и} \quad zH = p^2,$$

откуда

$$x = \frac{m^2}{H}, \quad y = \frac{n^2}{H} \quad \text{и} \quad z = \frac{p^2}{H}.$$

Площадь треугольника основания по трем его сторонам выражается так:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = l^2,$$

следовательно,

$$l^4 = \frac{m^2+n^2+p^2}{2H} \cdot \frac{m^2+n^2-p^2}{2H} \cdot \frac{m^2-n^2+p^2}{2H} \cdot \frac{n^2+p^2-m^2}{2H}$$

или

$$16H^4l^4 = (m^2+n^2+p^2)(m^2+n^2-p^2)(m^2-n^2+p^2)(n^2+p^2-m\ ),$$

или

$$2Hl = \sqrt[4]{(m^2+n^2+p^2)(m^2+n^2-p^2)(m^2-n^2+p^2)(n^2+p^2-m^2)}$$

и

$$H = \frac{1}{2l}\sqrt[4]{(m^2+n^2+p^2)(m^2+n^2-p^2)(m^2-n^2+p^2)(n^2+p^2-m^2)} \text{ куб. ед.}$$

Итак,

$$V = Q \cdot H = \frac{l}{2}\sqrt[4]{(m^2+n^2+p^2)(m^2+n^2-p^2)(m^2-n^2+p^2)(n^2+p^2-m^2)} \text{ куб. ед.}$$

Проверяя правильность размерности полученной формулы, находим, что под корнем имеется однородный многочлен 8-й степени, что при извлечении корня дает однородный многочлен 2-й степени, а потому правая часть формулы — выражение 3-й степени, что соответствует измерению левой части, так как объем V — величина третьего измерения.

§ 53. Теорема Кавальери.

1. Помимо рассмотренного выше вычисления объема призм, связанного с идеей преобразования тел по равносоставленности, пользуются иногда, в особенности в тех исключительных случаях, когда число часов по учебному плану недостаточно для проработки как темы „объемы многогранников", так и темы „объемы круглых тел", приемом, основанным на теореме Кавальери и являющимся частным приемом, вытекающим из метода пределов.

Б о н а в е н т у р а К а в а л ь е р и (1591—1647) — итальянский математик, современник К е п л е р а (1571—1630) и Г а л и л е я (1564—1642), ученик и друг последнего. Важнейшее сочинение Кавальери „Геометрия неделимых" появилось в первом своем издании в 1635 г., во втором, дополненном, — в 1653 г., уже после смерти Кавальери. В этой работе Кавальери изложил элементы и основы своего метода; некоторые дополнения и пояснения к методу неделимых были изложены в работе, опубликованной в 1647 г. под названием „Шесть геометрических упражнений".

Что же такое „неделимые" и в чем заключался метод неделимых, которым пользовался Кавальери?

Термин „неделимые“ встречается в истории математики со времен Брадвардина, английского математика XIV в.; поясняя термин „неделимый“, Брадвардин говорит: „Неделимо то, что уже нельзя разделить. Так, точка положена неделима“. Кавальери, приводя в начале первой книги своей геометрии ряд определений, не дает определения понятия „неделимое“; лишь постепенно, в результате изучения его труда, становится понятным, что Кавальери пользуется „неделимыми“, как особым искусственным средством для сравнения рассматриваемых им геометрических образов, и принимает точки за „неделимые“ элементы линии, прямые — за „неделимые“ элементы плоскости, плоскости — за „неделимые“ элементы тела; при этом каждое из „неделимых“ путем „течения“, т. е. путем определенного перемещения, может образовать новый геометрический образ, измерение которого на единицу выше измерения „неделимого“, движением которого он образован. Вообще, Кавальери разлагал всякий геометрический образ на „неделимые“ элементы и определение свойств фигур, плоских и пространственных, базировал на отношении совокупностей „неделимых“.

„Чтобы найти отношение, в котором находятся между собою две плоские фигуры или два тела, — говорит Кавальери, — достаточно найти отношение, в котором находятся „все линии“ этих фигур или „все плоскости“ этих тел. Это положение я как бы кладу в основу моей новой геометрии“.

Не вполне четкие определения, данные Кавальери, а также некоторые неправильно выраженные им основные положения, как, например, „линия есть сумма точек, не имеющих протяжения“ и другие, вызвали со стороны его современников нападки на весь его метод, но нашлись и горячие защитники его метода. Приводим высказывание Паскаля.

„Все, что доказано верно понятым методом неделимых, может быть доказано строго и способом древних; один от другого отличается лишь внешним выражением идеи, что не может отталкивать рассудительных людей, коль скоро их предупредили, как понимать эти выражения. Поэтому-то я нисколько не затрудняюсь говорить на языке „неделимых“: „сумма линий“ или „сумма ординат“; людям, не понимающим учения неделимых, кажется, что представлять площадь фигуры составленной из неопределенного числа прямых линий (не имеющих ширины) значит грешить против геометрии; это происходит только от недостатка понимания с их стороны, ибо под этими выражениями подразумевается не что иное, как сумма неопределенного числа прямоугольников, образуемых каждой ординатой с соответствующей частью оси“.

Для более подробного выяснения метода Кавальери отсылаем читателя к книге Вилейтнера „Хрестоматия по истории математики“, вып. 4-й — Исчисление бесконечно-малых, изд. 1932 г., в которой приведено доказательство теоремы о сумме квадратов, построенных на неделимых треугольника.

2. Основное предложение, на котором зиждется метод Кавальери, изложено им в первом предложении седьмой книги его геометрии; оно следующее: *геометрические образы как плоские, так и пространственные, равны по содержанию, если сечения, проведенные в обоих образах на равных высотах, дают равные отрезки прямых или плоскостей.*

Это предложение принимается в элементарном курсе геометрии без доказательства, так как доказательство требует развитого понятия о пре-

целе. Строгое доказательство обычно заменяют апелляцией к интуиции и опытом, убеждающим учащихся в справедливости высказанного положения.

В школьном преподавании предложение Кавальери, как принимаемое без доказательства, принято именовать принципом Кавальери; мы все же будем именовать это предложение, как это и следует делать, т е о р е м о й.

Необходимо иметь в виду, что Кавальери методом неделимых подготовил почву методу бесконечно-малых. Однако метод неделимых скоро был заброшен и забыт, как только метод бесконечно-малых Ньютона и Лейбница указал более простые пути решения задач на вычисление площадей, поверхностей и объемов.

Упомянем, что лишь в 1756 г. Segner (1704—1777) снова стал пользоваться теоремой Кавальери для вычисления объемов тел, и теорема эта стала проникать в среднюю школу.

В школьном преподавании теорема Кавальери применяется главным образом в Германии; французы, под влиянием Лежандра и его обработки Евклида, не являются сторонниками введения в школьное преподавание теоремы Кавальери; то же следует сказать и об англичанах, которые до последнего времени более или менее близко придерживаются изложения Евклида.

При использовании в элементарном курсе теоремы Кавальери предлагаем читать ее так:

Два тела, основания которых лежат в одной плоскости и высоты которых равны, равновелики, если равновелики любые их сечения, проведенные на одинаковой высоте параллельно плоскостям оснований.

3. Прежде чем дать учащимся формулировку теоремы, следует разъяснить им показом и постановкой ряда вопросов главные мысли, лежащие в основе теоремы; *они следующие:*

1) всякое тело можно рассматривать как бы состоящим из сколько угодно большого числа тонких слоев, которые получаются путем сечения тела параллельными плоскостями;

2) эти слои равновелики, если они имеют равновеликие основания и одинаковую толщину;

3) два тела считаются равновеликими, если равновелики слои, из которых они составлены.

Для достижения большей наглядности при разборе этих положений необходимо использовать наглядные пособия: стопу бумаги, колоду игральных карт, модели треугольной пирамиды или шара, разрезанные на тонкие слои с параллельными основаниями, и другие. Передвижение отдельных слоев и, тем самым, деформация тел, составленных из тонких слоев, должны наглядно показать учащимся, что тела равновелики, если соответственно равновелики слои, из которых они составлены.

Весьма целесообразно остановиться на рассмотрении некоторых равновеликих плоских фигур, рассеченных на части прямыми, параллельными основанию фигуры, с тем, чтобы наилучше подготовить почву для восприятия учащимися формулировки теоремы Кавальери.

Может быть рассмотрен прямоугольник и параллелограм (рис. 254) с равными высотами и равными основаниями, две неравные трапеции (рис. 255), основания и высоты которых соответственно равны, два не-

равных треугольника (рис. 256) с равными основаниями и равными высотами, причем в каждом отдельном случае основания каждой пары рассматриваемых фигур лежат на одной прямой и по одну сторону от последней.

Следует затем пересечь прямоугольник и параллелограм прямыми, параллельными их основаниям (рис. 254); на каждой из прямых, пересе-

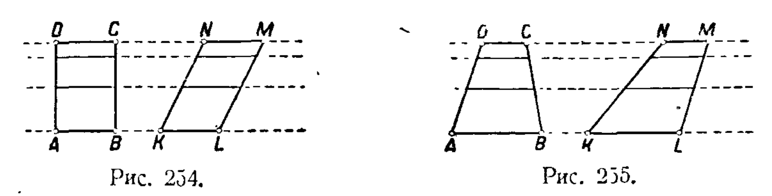


Рис. 254. Рис. 255.

кающих обе фигуры, отсекаются отрезки; надо выяснить, почему равны 1) отрезки прямых, заключенные между сторонами фигур и отстоящие от их оснований на одно и то же расстояние, и 2) площади соответственных частей фигур, полученные проведением параллельных прямых-секущих.

Следует показать учащимся получение различных по форме, но все же равновеликих плоских фигур путем деформации двух равновеликих

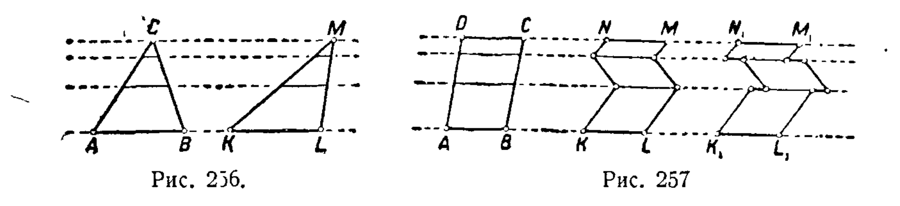


Рис. 256. Рис. 257

фигур с равными основаниями и равными высотами (рис. 257), если разбить эти фигуры на части прямыми, проведенными параллельно их основаниям и отстоящими от оснований на соответственно одинаковое расстояние.

Такой показ должен помочь уяснить учащимся, что части равновеликих фигур, заключенные между соответственными парами параллельных прямых, также равновелики, если равны отрезки сечений, проведённых на соответственно одинаковой высоте от оснований рассматриваемых фигур.

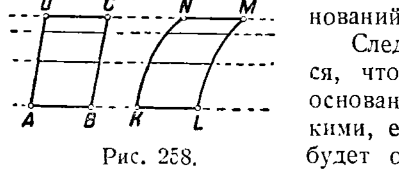


Рис. 258.

Следует также показать и пояснить учащимся, что две равновеликие фигуры с равными основаниями и высотами останутся равновеликими, если одна из фигур после деформации будет ограничена с боков криволинейными отрезками (рис. 258), при условии если равны отрезки сечений, проведенных на соответственно одинаковой высоте от оснований рассматриваемых фигур.

Подобный показ и разбор позволяют сделать затем вывод: две плоские фигуры, заключенные между параллельными прямыми, равновелики, если равны любые сечения, проведенные параллельно основаниям на одной и той же высоте от последних.

Когда основные положения теоремы Кавальери разъяснены на плоских фигурах, следует перейти к рассмотрению тех же положений по отношению к телам.

Берется прямая четырехугольная призма (рис. 259); пусть высота ее равна h. Эта призма разбивается сечениями, параллельными основанию, на n призм с основаниями, равными основанию данной призмы, и высотой, равной $\frac{h}{n}$. Если затем деформировать данную призму так, как показано на рисунке 259, сдвинув отдельные ее части, то получится новое тело, объем которого равен объему данной призмы, так как оно составлено из n равных малых призм, на которые сечениями разбита данная призма.

Это положение и соответствует содержанию теоремы Кавальери: два тела, основания которых лежат в параллельных плоскостях, равновелики, если равновелики любые сечения, проведенные на одном и том же расстоянии от основания, параллельно ему.

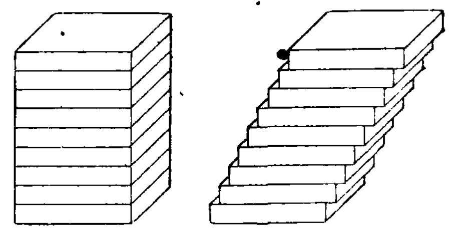


Рис. 259.

Когда это основное положение сущности теоремы Кавальери дано учащимся и уяснено, можно перейти к разбору вопросов, касающихся вывода формул объемов тел.

Нужно указать, что рассмотренные выше вопросы должны быть поставлены и рассмотрены лишь после того, как учащиеся уже знакомы с основными положениями об измерении объемов тел и с теоремой об объеме прямоугольного параллелепипеда.

4. Первая теорема, доказываемая на основе теоремы Кавальери, есть теорема об объеме любой призмы; доказательство приведено в стабильном учебнике. Доказательство основано на сопоставлении любой призмы с прямоугольным параллелепипедом, имеющим с той или иной призмой равновеликие основания и одинаковую высоту; внимание учащихся должно быть главным образом направлено на уяснение того, что сечение любой призмы плоскостью, параллельной основанию, равно основанию призмы. У рассматриваемых призм и параллелепипеда основания равны: $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$; также равны и сечения, проведенные на одной и той же высоте параллельно основанию, а именно: $q = q_1 = q_2 = q_3$; таким образом, выполняется условие теоремы Кавальери и, следовательно, любые призмы, имеющие равновеликие основания и равные высоты, равновелики; отсюда следует, что $V_1 = Q_1H$; $V_2 = Q_2H$; $V_3 = Q_3H$, так как $V = QH$, а $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$. Итак,

объем любой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

§ 54. Объем пирамиды.

1. К вычислению объема пирамиды можно подойти различными путями. Обычный вывод формулы объема пирамиды распадается на три части:

1) установление леммы: треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами равновелики;

2) установление теоремы: „объем треугольной пирамиды равен произведению площади основания пирамиды на одну треть ее высоты";

3) установление, что „объем любой пирамиды равен произведению площади ее основания на одну треть ее высоты".

Доказательство приведенной выше леммы распадается на две части: 1) доказывается, что обьем пирамиды, площадь основания которой Q и высота H, есть общий предел суммы объемов входящих и выходящих призм, соответствующим образом построенных, и 2) устанавливается на основе уже доказанной первой части леммы равновеликость пирамид, основания которых равновелики и высоты которых равны.

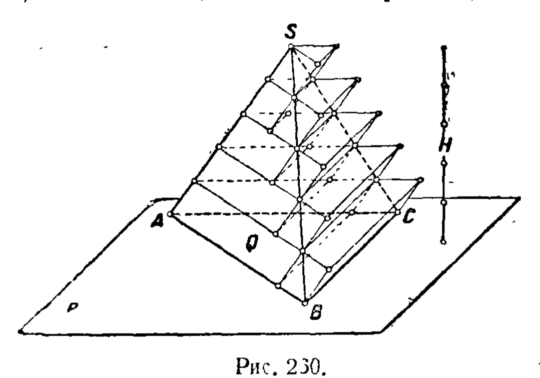


Рис. 230.

Доказательство. 1) Пусть дана треугольная пирамида $SABC$ (рис. 260) с основанием Q и высотой H. Делим высоту H на произвольное число n равных частей и проводим через точки деления плоскости, параллельные основанию ABC; на треугольных сечениях строим затем входящие и выходящие призмы; их основаниями служат сечения, и высота каждой призмы равна $\frac{H}{n}$; построение дает $n-1$ входящих призм и n выходящих призм.

Если обозначить по порядку, начиная от вершины, объемы входящих призм через $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$, а объемы выходящих призм через $V'_1, V'_2, \ldots, V'_n$, то, очевидно, что $V_1 = V'_1$, $V_2 = V'_2, \ldots, V_{n-1} = V'_{n-1}$, так как каждая пара рассматриваемых призм имеет соответственно равные основания и высоту, равную $\frac{H}{n}$; ясно, что n-я выходящая призма, объем которой V'_n, соответственно не имеет равной себе входящей призмы.

Можно записать:

$$(V'_1 + V'_2 + V'_3 + \ldots + V'_{n-1} + V'_n) - (V_1 + V_2 + \ldots + V_{n-1}) = V_n,$$

где $V_n = Q \cdot \frac{H}{n}$ и Q — основание пирамиды.

$\frac{H}{n}$ по мере увеличения числа n может быть сделано меньше какого угодно наперед заданного весьма малого положительного числа ε, а потому понятно, что и $V_n = Q \cdot \frac{H}{n}$ — число бесконечно-малое и $V_n < \varepsilon$. Принимая во внимание, что

$$V'_1 + V'_2 + \ldots + V'_{n-1} + V'_n > V > V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_{n-1},$$

где V — объем данной треугольной пирамиды, можем записать, что разность между нижней границей и V подавно меньше ε.

Итак, $(V'_1 + V'_2 + \ldots + V'_{n-1} + V'_n) - V < \varepsilon$, а потому по мере возрастания числа n имеем:

$$\lim_{n \to \infty} (V'_1 + V'_2 + \ldots + V'_n) = V.$$

Точно так же находим, что

$$\lim_{n \to \infty} (V_1 + V_2 + \ldots + V_{n-1}) = V.$$

Первая часть теоремы доказана. Построения, указанные в приведенном доказательстве, могут быть иллюстрированы на геометрическом ящике.

2) Рассматриваем затем две треугольные пирамиды $SABC$ и $S_1A_1B_1C_1$, основания которых Q и Q_1 равновелики и высоты которых H и H_1 равны (рис. 261).

Тем же приемом, каким были построены выше в пирамиде $SABC$ входящие и выходящие призмы, строим входящие и выходящие призмы

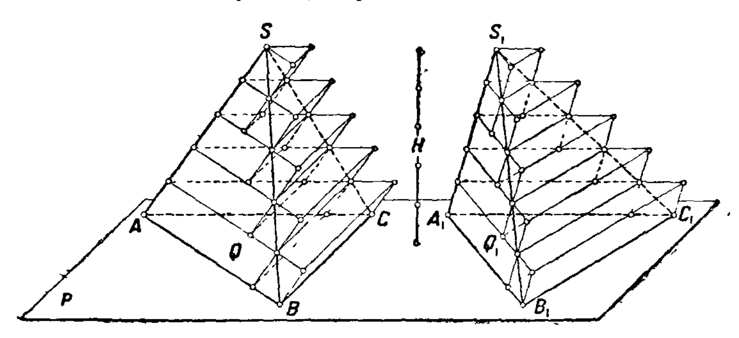


Рис. 261.

в данных двух пирамидах $SABC$ и $S_1A_1B_1C_1$, проводя на одинаковом расстоянии от основания ABC и $A_1B_1C_1$ сечения, параллельные основаниям.

Понятно, что сумма объемов выходящих призм одной пирамиды соответственно равна сумме обьемов выходящих призм другой пирамиды.

На самом деле, если обозначить выходящие призмы пирамид $SABC$ и $S_1A_1B_1C_1$ соответственно через $V'_1, V'_2, V'_3, \ldots, V'_n$ и $U'_1, U'_2, U'_3, \ldots, U'_n$, то $V'_1 = U'_1$, $V'_2 = U'_2$, .. $V'_n = U'_n$, Вообще соответствующие призмы V'_i и U'_i равны, так как имеют равные высоты $\frac{H}{n}$ и равновеликие основания: $Q_i = Q \cdot \frac{h^2}{H_2}$ и $Q'_i = Q' \cdot \frac{h^2}{H^2}$ и $Q_i = Q'_i$, потому что основания пирамид Q и Q' равновеликие.

Отсюда заключаем:

$$\frac{V'_1 + V'_2 + \ldots + V'_n}{U'_1 + U'_2 + \ldots + U'_n} = \frac{\sum V'_i}{\sum U'_i} = 1,$$

где $\sum$ — знак суммы, и

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty} (V'_1 + V'_2 + \ldots + V'_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} (U'_1 + U'_2 + \ldots + U'_u)} = 1$$

на основании теоремы: если две переменные находятся в одном и том же отношении, то в том же отношении находятся и их пределы, если предел знаменателя не равен нулю.

Но

$$\lim_{n\to\infty}(V_1' + V_2' + \ldots + V_n') = V_1$$

и

$$\lim_{n\to\infty}(U_1' + U_2' + \ldots + U_n') = V_2,$$

а потому и $\frac{V_1}{V_2} = 1$, откуда находим: $V_1 = V_2$. Итак, **две треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами равновелики.**

2. На основании рассмотренной леммы выводится затем формула объема треугольной пирамиды через сравнение ее объема с объемом треугольной призмы, основание которой равно основанию пирамиды и высота которой равна высоте пирамиды; традиционным способом треугольная призма разбивается на три равновеликие пирамиды, так что $V_{пир} = \frac{1}{3} QH$. При выводе доказательства необходимо иметь соответствующую

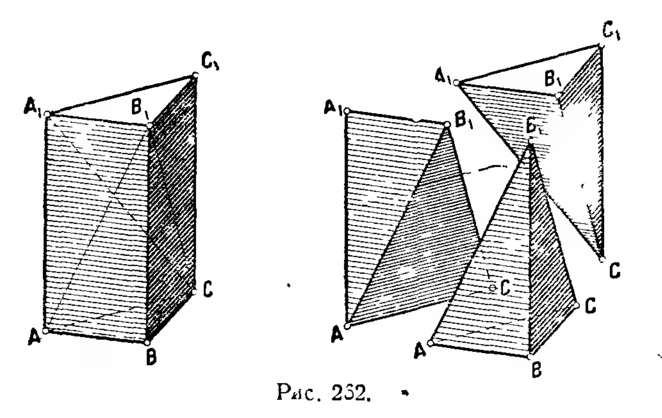


Рис. 262.

разборную деревянную или картонную модель призмы, а также каркасную проволочную призму, состоящую из соответствующих трех равновеликих пирамид.

Весьма полезно, если сами учащиеся шаг за шагом выполнят на геометрическом ящике построения, требуемые по ходу доказательства.

Доказательство. Проводим в призме $ABCA_1B_1C_1$ плоскости A_1B_1C и AB_1C (рис. 262). Они разобьют призму на три треугольные пирамиды с вершинами в точке B_1: B_1ABC, B_1A_1AC и $B_1A_1C_1C$. Обозначим объемы этих пирамид соответственно через V_1, V_2 и V_3.

Пирамиды B_1A_1AC и $B_1A_1C_1C$ имеют равные основания A_1AC и A_1C_1C, так как диагональ A_1C разбивает прямоугольник AA_1C_1C на два равных треугольника, кроме того, у этих пирамид общая вершина B_1 и основания их лежат в одной плоскости, следовательно, высоты их равны. Сечения этих двух пирамид плоскостями, параллельными основаниям, равновелики (стабильный учебник, стр. 57), а потому, на основании леммы, объемы этих пирамид равны: $V_2 = V_3$.

Рассмотрим затем пирамиды B_1ABC и $B_1A_1C_1C$; если принять в пирамиде $B_1A_1C_1C$ за вершину точку C, то основанием ее будет треуголь-

ник $A_1B_1C_1$; кроме того, эти пирамиды имеют равные высоты, следовательно, и данные пирамиды на основании леммы равновелики, $V_1 = V_3$.

Сопоставляя равенства $V_2 = V_3$ и $V_1 = V_3$, находим, что

$$V_1 = V_2 = V_3.$$

Но $V_1 + V_2 + V_3 = V$, т. е. объему призмы, а отсюда непосредственно следует, что объем треугольной пирамиды равен третьей части объема призмы, имеющей с ней одинаковые основание и высоту.

Если основания призмы и пирамиды равны Q, а их высоты H, то можно записать:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} V_{\text{пр}} = \frac{1}{3} QH.$$

Вывод остается справедливым, если дана наклонная призма; и в данном случае:

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} V_{\text{пр}}.$$

Когда доказано, что объем треугольной пирамиды равен произведению одной трети площади ее основания на высоту пирамиды, нетрудно уже установить объем любой пирамиды разбивкой ее диагональными сечениями на треугольные пирамиды и последующим суммированием их объемов.

3. Вместо такого громоздкого пути изложения объема пирамиды существует другой более короткий путь; пользуясь им, не надо устанавливать никаких предварительных лемм. Это доказательство, приведенное в стабильном учебнике, восходит к Архимеду и в его трактовке называется методом исчерпывания.

Необходимо указать, что, прежде чем приступить к доказательству теоремы об объеме пирамиды методом Архимеда, полезно вспомнить с учащимися свойства сечений, проведенных в пирамиде параллельно ее основанию, формулу объема призмы и вычисление предела суммы бесконечно убывающей кратной прогрессии. Проводя доказательство теоремы, следует добиться четкого понимания учащимися, что сумма объемов двух призм, возникающих при соответствующем построении и выделяемых из пирамиды, равна одной четверти произведения площади основания пирамиды на ее высоту.

Этим основным выводом приходится пользоваться, чтобы получить члены ряда суммы объемов призм, выделяемых из пирамид: 1) из данной пирамиды находим сумму двух равновеликих призм, 2) из двух пирамид, оставшихся после выделения из данной пирамиды двух призм, находим затем 4 равновеликих призмы, 3) из четырех пирамид, оставшихся после выделения призм, находим 8 призм, и т. д. Таким образом, выписав получающийся ряд членов, суммируя его и переходя к пределу при условии, что n — число членов ряда — безгранично возрастает, имеем:

$$V_{\text{пир}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{QH}{4} + \frac{QH}{4^2} + \frac{QH}{4^3} + \ldots + \frac{QH}{4^n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{QH}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{QH}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) = \frac{QH}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{QH}{3} \text{ (куб. ед.).}$$

Ввиду того, что этот путь в прошлом реже употреблялся, у некоторых преподавателей может явиться сомнение в его целесообразности; однако опыт показывает, что доказательство теоремы об объеме пирамиды методом Архимеда при тщательной подготовке к нему преподавателя вполне доступен учащимся и хорошо ими усваивается.

4. Более короткий, но менее полный и строгий прием нахождения объема пирамиды основан на теореме Кавальери. Предварительно устанавливается лемма — треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами равновелики, что является следствием из общей теоремы Кавальери.

В самом деле, площади сечений, проведенных на разном расстоянии от оснований как в одной, так и в другой пирамиде, соответственно равны

$$Q_1 = Q \cdot \frac{h^2}{H^2} \text{ и } Q_1' = Q \cdot \frac{h^2}{H^2}.$$

Условия теоремы Кавальери соблюдены, следовательно, пирамиды равновелики.

После этого переходят к сравнению пирамиды и соответствующей призмы так, как указано в первом изложении.

Нахождение объема многоугольной пирамиды с основанием Q_n и высотой H при изложенном способе Кавальери более целесообразно провести следующим образом: мысленно строим пирамиду с высотой H и основанием Q_3, где основание треугольник, так что $Q_3 = Q_n$. Затем устанавливается, что площади сечений, проведенных на равных расстояниях от оснований и им параллельных, равновелики.

Действительно,

$$Q_{n_i} = Q_n \cdot \frac{h^2}{H^2} \text{ и } Q_{3_i} = Q_3 \cdot \frac{h^2}{H^2},$$

откуда $Q_{n_i} = Q_{3_i}$. Последнее указывает, что условие теоремы Кавальери выполнено, а потому $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} Q_n H$.

5. Задача. В треугольной пирамиде два непересекающихся ребра равны каждое a, каждое же из остальных ребер равно b. Вычислить объем пирамиды.

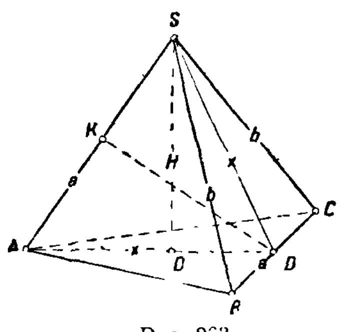


Рис. 263.

Пусть $SABC$ — искомая треугольная пирамида (рис. 263), и пусть ребра SA и BC равны каждое a, остальные же ребра равны каждое b. Объем пирамиды вычисляется по формуле $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} QH$ (куб. ед.).

Из условия задачи следует, что основанием ABC пирамиды служит равнобедренный треугольник; пусть его высота h при построении изображения пирамиды расположится параллельно вертикальной плоскости чертежа. В таком случае SD — высота боковой грани BSC на основании теоремы о трех перпендикулярах. Плоскостью ASD данная пирамида делится на две конгруентные треугольные пирамиды $CADS$ и $BADS$, у которых соответственно равны ребра, плоские углы и трехгранные углы. Высотой одной из них служит CD, другой — BD, ибо $BC \perp$ пл. ADS, и каждая из высот равна $\frac{a}{2}$. Остается вычислить пл. ADS. Треугольник SAD — равнобедренный, так как стороны $DS = DA$, как высоты равных

треугольников BAC и BSC. Из треугольника CDS имеем: $x^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$, из треугольника же SKD находим: $h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$ и $h = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - 2a^2}$; таким образом, пл. $ADS = Q = \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - 2a^2} = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - 2a^2}$ (кв. ед.) и объем

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - 2a^2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{12}\sqrt{4b^2 - 2a^2} \text{ куб. ед.}$$

Можно было бы для решения задачи избрать и другой путь, а именно — провести из вершины S высоту на плоскость основания ABC; но в таком случае следует сперва доказать, что основание высоты упадет на AD, и, вычислив сторону SD, которая равна стороне AD треугольника ASD, найти боковую высоту DK этого треугольника. Указанный путь более сложен, нежели первый, но дает, конечно, тот же результат.

Задача возможна только тогда, когда между числовыми данными имеется соотношение $4b^2 - 2a^2 > 0$, или $2b^2 > a^2$, или $a < b\sqrt{2}$.

Отношение объемов пирамид.

6. Следует рассмотреть отношение объемов пирамид. Даны две пирамиды, объемы которых V_1 и V_2. Пусть

$$V_1 = \frac{1}{3} Q_1 H_1 \quad \text{и} \quad V_2 = \frac{1}{3} Q_2 H_2, \text{ тогда}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{Q_1 H_1}{Q_2 H_2}.$$

Если $Q_1 = Q_2$ или $H_1 = H_2$, то соответственно $V_1 : V_2 = H_1 : H_2$ или $V_1 : V_2 = Q_1 : Q_2$.

Если пирамиды подобны, находим на основе тех же рассуждений, какие были применены при нахождении отношения подобных призм, что

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{H_1^3}{H_2^3} = \frac{a_1^3}{a_2^3} = \ldots = \frac{Q_1^{\frac{3}{2}}}{Q_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{l_1^3}{l_2^3} = \frac{b_1^3}{b_2^3} \text{ и т. д.}$$

Итак, **объемы двух подобных пирамид относятся как кубы соответствующих линейных элементов или как кубы квадратных корней из площадей подобных граней.**

§ 55. Объем усеченной пирамиды.

1. Вывод объема усеченной пирамиды может быть выполнен двумя способами: один из них — аналитический, другой — геометрический. При аналитическом методе объем усеченной пирамиды вычисляется, как разность объемов двух полных пирамид; вывод этот приведен в стабильном учебнике.

Приводим вывод геометрический; он сложнее, требует для проработки больше времени; он может служить темой для работы в кружке.

I. Вычерчивается прежде всего полная пирамида $SABC$ и в ней проводится сечение $A_1B_1C_1$, параллельное основанию, получается усеченная пирамида $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 264).

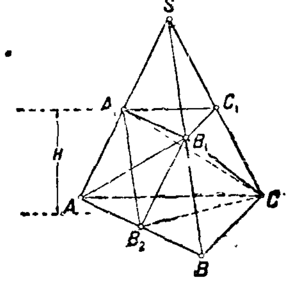


Рис. 264.

II. Затем проводится плоскость через вер-

шины B_1, A и C усеченной пирамиды; эта плоскость отсекает от усеченной пирамиды треугольную пирамиду B_1ABC; хорошо выделить эту пирамиду, отметив ее ребра цветным мелом или карандашом. Объем ее равен $\frac{1}{3}$ пл. $ABC \cdot H$, где H — высота усеченной пирамиды.

III. После этого оставшаяся часть усеченной пирамиды — четырехугольная пирамида $B_1ACC_1A_1$ — разбивается плоскостью, проходящей через вершины A_1, B_1 и C, на две пирамиды $B_1A_1C_1C$ или $CA_1B_1C_1$ и B_1A_1AC. Объем пирамиды $CA_1B_1C_1 = \frac{1}{3}$ пл. $A_1B_1C_1 \cdot H$.

IV. Наконец, если провести на плоскости ASB из точки B_1 прямую $B_1B_2 \parallel SA$ и соединить точку B_2 с вершинами A_1 и C, то получится пирамида B_2A_1AC. Сравним между собой пирамиду B_1A_1AC и пирамиду A_1AB_2C.

Пирамида B_1A_1AC имеет вершину B_1 и основание A_1AC,
„ A_1AB_2C „ „ B_2 „ „ A_1AC,

отсюда следует, что основания их совпадают, но вершины их B_1 и B_2 находятся на прямой B_1B_2, параллельной плоскости AA_1C, ибо $B_1B_2 \parallel A_1A$, а потому высоты их равны, следовательно, и объемы этих пирамид равны.

V. Пирамида A_1AB_2C, которую можно заменить равновеликой ей пирамидой B_1AA_1C, имеет своим основанием треугольник AB_2C и высоту H, равную высоте усеченной пирамиды.

Относительно треугольников $A_1B_1C_1$ и ACB_2, имеющих равные углы, $\angle C_1A_1B_1 = \angle CAB$, можно записать:

$$\frac{\text{пл. } A_1B_1C_1}{\text{пл. } AB_2C} = \frac{A_1C_1 \cdot A_1B_1}{AC \cdot AB_2},$$

но $AB_2 = A_1B_1$, а потому

$$\frac{\text{пл. } A_1B_1C_1}{\text{пл. } AB_2C} = \frac{A_1C_1}{AC}. \qquad (1)$$

Что же касается треугольников AB_2C и ABC, имеющих равные высоты, то можно записать:

$$\frac{\text{пл. } AB_2C}{\text{пл. } ABC} = \frac{AB_2}{AB}. \qquad (2)$$

Сравнивая полученные равенства и принимая во внимание, что правые части равенств (1) и (2) равны вследствие подобия треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, оснований усеченной пирамиды, имеем: $\frac{\text{пл. } A_1B_1C_1}{\text{пл. } AB_2C} = \frac{\text{пл. } AB_2C}{\text{пл. } ABC}$, т. е. площадь AB_2C основания пирамиды A_1AB_2C есть средняя пропорциональная площадей оснований усеченной пирамиды. Итак,

$$\text{пл. } AB_2C = \sqrt{(\text{пл. } ABC)(\text{пл. } A_1B_1C_1)}.$$

Обозначив площади оснований усеченной пирамиды через Q и q, имеем:

$$V_{\text{ус. пир}} = \frac{1}{3} Q \cdot H + \frac{1}{3} q \cdot H + \frac{1}{3} \sqrt{Qq} \cdot H = \frac{1}{3} H (Q + q + \sqrt{Qq}) \text{ куб. ед.}$$

Та же формула получена была при выводе формулы объема усеченной пирамиды аналитическим путем.

Геометрическое доказательство последней теоремы не только содействует расширению пространственных представлений учащихся, но и показывает им, как геометрически получается формула объема усеченной пирамиды, и кроме того, позволяет провести параллель между понятиями о равновеликих телах — телах, равных по объему — и о равновеликих плоских фигурах — фигурах, равных по площади.

2. Рассмотрим еще отношение объемов двух усеченных пирамид:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{H_1(Q_1+q_1+\sqrt{Q_1q_1})}{H_2(Q_2+q_2+\sqrt{Q_2q_2})}.$$

В том случае, когда усеченные пирамиды подобны, имеем:

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{a_1^2}{a_2^2}=\frac{H_1^2}{H_2^2}=\frac{l_1^2}{l_2^2}=\frac{q_1}{q_2}$$

и

$$\frac{Q_1q_1}{Q_2q_2}=\frac{a_1^2\cdot a_1^2}{a_2^2\cdot a_2^2} \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{Q_1q_1}}{\sqrt{Q_2q_2}}=\frac{a_1^2}{a_2^2}=\frac{H_1^2}{H_2^2}=\ldots$$

Взяв ряд равных отношений:

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{\sqrt{Q_1q_1}}{\sqrt{Q_2q_2}}=\frac{a_1^2}{a_2^2}=\frac{H_1^2}{H_2^2}=\ldots,$$

находим:

$$\frac{Q_1+q_1+\sqrt{Q_1q_1}}{Q_2+q_2+\sqrt{Q_2q_2}}=\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{a_1^2}{a_2^2}=\frac{H_1^2}{H_2^2}=\ldots,$$

следовательно

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{H_1}{H_2}\cdot\frac{H_1^2}{H_2^2}=\frac{H_1^3}{H_2^3}=\frac{a_1^3}{a_2^3}=\frac{l_1^3}{l_2^3}=\ldots=\frac{Q_1^{\frac{3}{2}}}{Q_2^{\frac{3}{2}}}=\frac{q_1^{\frac{3}{2}}}{q_2^{\frac{3}{2}}}=\ldots$$

Итак, **объемы подобных усеченных пирамид относятся, как кубы их линейных элементов или как кубы квадратных корней из площадей подобных граней.**

3. Формула объема усеченной пирамиды встречается в древнейшем египетском папирусе Голенищева, хранящемся в Музее изящных искусств в Москве. Одна из задач на вычисление объема усеченной пирамиды, рассматриваемая в папирусе, приведена во второй части стабильного учебника.

У греков вопросы, касающиеся усеченной пирамиды, встречаются в первом столетии до начала нашей эры у Герона.

Герон дает примеры точного вычисления объемов не только полных пирамид, но и усеченных, основания которых квадраты, прямоугольные или равносторонние треугольники, а также правильные многоугольники. Приводим вычисление объема правильной четырехугольной усеченной пирамиды, данное Героном.

Если обозначить, пользуясь современной символикой стороны квадратов оснований соответственно через a_1 и a_2, высоту через H и боковое ребро через b, то высота H и объем усеченной пирамиды выразятся так:

$$H=\sqrt{b^2-\frac{1}{2}(a_1-a_2)^2} \quad \text{и} \quad V=H\left[\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2\right].$$

Индусские математики, сделавшие, вообще говоря, весьма мало для развития стереометрии, все же дали формулу для вычисления объема усеченной пирамиды. Однако формула эта неверна. Так Ариабхата (род. в 476 г.) вычисляет объем усеченной пирамиды, как половину произведения площади основания на высоту.

Брамагупта (род. в 598 г.) дает следующие три формулы для вычисления объема усеченной пирамиды, основания которой квадраты:

1) Объем V_1 равен произведению высоты пирамиды на площадь квадрата, сторона которого равна среднему арифметическому сторон оснований.

$$V_1 = H \cdot \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2,$$

где a_1 и a_2 — соответствующие стороны оснований.

Эта формула предназначена для практических целей.

2) Обьем V_2 равен произведению среднего арифметического площадей оснований на высоту $V_2 = H\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}$.

Данная формула точнее предыдущей.

3) Объем V_3 равен обьему V_1, полученному применением первой формулы и увеличенному на $\frac{1}{3}$ разности между объемом V_2, полученным по второй формуле, и объемом V_1, полученным по первой формуле. В современных обозначениях данная формула запишется так: $V_3 = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{3}$. Эта формула по сравнению с предыдущими не только более точна, но дает точную величину объема усеченной пирамиды, основания которой квадраты.

Действительно, подставив в последнюю формулу вместо V_1 и V_2 соответствующие их значения, имеем:

$$V_3 = H\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} H\left[\frac{a_1^2 + a_2^2}{2} - \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2\right] =$$

$$= H\left(\frac{a_1^2}{4} + \frac{a_1 a_2}{2} + \frac{a_2^2}{4} + \frac{1}{6}a_1^2 + \frac{1}{6}a_2^2 - \frac{1}{12}a_1^2 - \frac{1}{6}a_1 a_2 - \frac{1}{12}a_2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3} H (a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2).$$

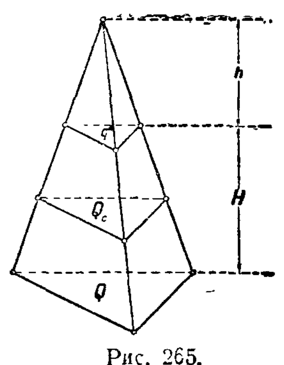


Рис. 265.

Впервые формула объема усеченной пирамиды в том виде, в каком она обычно дается в настоящее время, встречается у Леонарда Пизанского (1220), конечно, не в современной буквенной символике. До XIX в. редко встречалась в учебниках формула объема усеченной пирамиды и еще реже — ее доказательство.

4. Остановимся еще на формулах объема усеченной пирамиды, которые мы встречаем у египтян. Объем усеченной пирамиды равен или произведению среднего арифметического площадей оснований на высоту, $V_1 = \frac{Q + q}{2} \cdot H$, или произведению площади среднего сечения на высоту, $V_2 = Q_{ср} \cdot H$.

Как видим, египтяне пользовались для вычисления объема усеченной пирамиды формулами, аналогичными формуле, по которой вычисляется площадь трапеции. Этими формулами пользуются и в настоящее время в некоторых случаях для ускорения вычислений. Остановимся на последних формулах V_1 и V_2 и выясним, как велика ошибка, если вычислить по ним объем усеченной пирамиды.

Находим $Q_{ср}$. Из рисунка 265 видно, что

$$\frac{Q_{ср}}{q}=\frac{\left(\frac{H}{2}+h\right)^2}{h^2} \quad \text{или} \quad \frac{Q_{ср}}{q}=\left(\frac{H}{2h}+1\right)^2 \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{Q_{ср}}}{\sqrt{q}}=\frac{H}{2h}+1;$$

но

$$\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{q}}=\frac{H+h}{h} \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}{\sqrt{q}}=\frac{H}{h},$$

а потому

$$\frac{\sqrt{Q_{ср}}}{\sqrt{q}}=\frac{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}{2\sqrt{q}}+1 \quad \text{или} \quad 2\sqrt{Q_{ср}}=\sqrt{Q}+\sqrt{q},$$

следовательно,

$$\sqrt{Q_{ср}}=\frac{\sqrt{Q}+\sqrt{q}}{2} \quad \text{и} \quad Q_{ср}=\frac{1}{4}(Q+q+2\sqrt{Qq})$$

$$\text{и} \quad V_2=\frac{1}{4}(Q+q+2\sqrt{Qq})\cdot H.$$

Вычисляем разности 1) V_1-V и 2) $V-V_2$, где V — действительный объем усеченной пирамиды — равен $\frac{1}{3}(Q+q+\sqrt{Qq})$:

1) $V_1-V=\frac{Q+q}{2}\cdot H-\frac{1}{3}(Q+q+\sqrt{Qq})H=$

$$=\frac{1}{6}H(3Q+3q-2Q-2q-2\sqrt{Qq})=\frac{1}{6}H(Q+q-2\sqrt{Qq});$$

2) $V-V_2=\frac{1}{3}(Q+q+\sqrt{Qq})H-\frac{1}{4}(Q+q+2\sqrt{Qq})H=$

$$=\frac{1}{12}H(4Q+4q+4\sqrt{Qq}-3Q-3q-6\sqrt{Qq})=\frac{1}{12}H(Q+q-2\sqrt{Qq}).$$

Сопоставление полученных результатов показывает, что в первом случае абсолютная ошибка вдвое больше, чем во втором, следовательно, если вычесть из V_1-V удвоенную разность $V-V_2$, то получится 0. Итак,

$$V_1-V-2V+2V_2=0,$$

откуда

$$3V=V_1+2V_2=\frac{Q+q}{2}\cdot H+2Q_{ср}\cdot H,$$

или

$$3V=\frac{H}{2}(Q+q+4Q_{ср}),$$

или

$$V=\frac{H}{6}(Q+q+4Q_{ср}).$$

Полученный результат представляет собою объем усеченной пирамиды, **вычисленный по** формуле призматоида (см. ниже).

Можно предложить учащимся доказать тождественность последней формулы с полученной ранее формулой $\frac{1}{3}H(Q+q+\sqrt{Qq})$, т. е. доказать тождество

$$\frac{1}{6}H(Q+q+4Q_{ср})=\frac{1}{3}H(Q+q+\sqrt{Qq}).$$

Доказательство. Деля обе части равенства на $\frac{1}{6}H$, имеем:

$$Q+q+4Q_{ср}=2Q+2q+2\sqrt{Qq},$$

или $4Q_{ср}=Q+q+2\sqrt{Qq}$, или $4Q_{ср}=(\sqrt{Q}+\sqrt{q})^2$ или, наконец, $Q_{ср}=\left(\frac{\sqrt{Q}+\sqrt{q}}{2}\right)^2$, т. е. надо доказать, что площадь среднего сечения равна $\left(\frac{\sqrt{Q}+\sqrt{q}}{2}\right)^2$.

Зная, что $\frac{Q}{q}=\frac{(H+h)^2}{h^2}$ (рис. 265), находим, что $\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{q}}=\frac{H+h}{h}$, или $\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{q}}=\frac{H}{h}+1$, или $\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{q}}-1=\frac{H}{h}$, откуда $h=\frac{H\sqrt{q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}$. С другой стороны, зная, что $\frac{Q}{Q_{ср}}=\frac{(H+h)^2}{\left(\frac{H}{2}+h\right)^2}$ (рис. 265), имеем: $\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{Q_{ср}}}=\frac{H+h}{\frac{H}{2}+h}$ или, подставляя найденное значение для h, получим:

$$\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{Q_{ср}}}=\frac{H+\frac{H\sqrt{q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}}{\frac{H}{2}+\frac{H\sqrt{q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}}.$$

После соответствующих преобразований имеем:

$$\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{Q_{ср}}}=\frac{(\sqrt{Q}-\sqrt{q}+\sqrt{q})\cdot 2}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}+2\sqrt{q}}=\frac{2\sqrt{Q}}{\sqrt{Q}+\sqrt{q}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sqrt{Q_{ср}}}=\frac{2}{\sqrt{Q}+\sqrt{q}},$$

откуда $\sqrt{Q}+\sqrt{q}=2\sqrt{Q_{ср}}$ или $\sqrt{Q_{ср}}=\frac{\sqrt{Q}+\sqrt{q}}{2}$ и, наконец, $Q_{ср}=\left(\frac{\sqrt{Q}+\sqrt{q}}{2}\right)^2$, что и требовалось доказать.

Усеченная треугольная призма.

5. Вычисление объема усеченной треугольной призмы. Под усеченной призмой имеют в виду призму, основания которой не параллельны.

Пусть $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ — треугольная усеченная призма; ее основания не параллельны (рис. 266). Проводим через вершины A_1, B_2 и C_1 призмы плоскость; она отсечет от призмы треугольную пирамиду $B_2A_1B_1C_1$; если площадь ее основания равна Q, а высота H_b, то объем полученной пирамиды равен $\frac{1}{3}QH_b$. Пересечем затем оставшуюся четырехугольную пирамиду $B_2A_1C_1C_2A_2$ плоскостью, проходящей через вершину B_2 и диагональ A_2C_1 основания $A_1C_1C_2A_2$. Эта плоскость разделит четырехугольную пирамиду

$B_2A_1C_1C_2A_2$ на две треугольны пирамиды: пирамиду $B_2A_2C_1C_2$ и пирамиду $B_2A_2A_1C_1$.

Соединим вершну C_2 с вершинами A_1 и B_1 и сравним пирамиду $B_2A_2C_1C_2$ с пирамидой $C_2A_1B_1C_1$. Примем B_2 и B_1 за вершины этих пирамид; эти вершины лежат на прямой B_2B_1, параллельной грани $A_1C_1C_2A_2$; основания этих пирамид — треугольники $A_2C_1C_2$ и $A_1C_1C_2$; эти треугольники равновелики, так как имеют общее основание C_1C_2 и их вершины лежат на прямой A_1A_2, параллельной основанию C_1C_2, поэтому их высоты равны. Итак, пирамида $B_2A_2C_1C_2$ и пирамида $C_2A_1B_1C_1$ или $B_1A_1C_1C_2$ имеют равновеликие основания и равные высоты, следовательно, они равновелики, а потому объем пирамиды $B_2A_2C_1C_2$ равен объему пирамиды $C_2A_1B_1C_1=\frac{1}{3}QH_c$, где Q — площадь основания призмы, а H_c — расстояние вершины C_2 от плоскости основания.

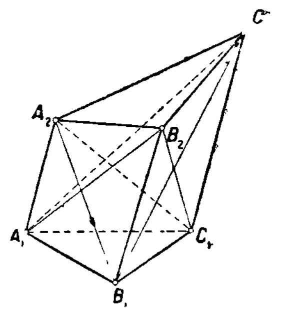


Рис. 265.

Соединим затем вершину A_2 с вершиной B_1 и сравним между собою пирамиды $B_2A_2A_1C_1$ и $A_2A_1B_1C_1$.

У первой из этих пирамид вершина B_2 и основание $A_2A_1C_1$, у второй — вершина B_1 и основание $A_1A_2C_1$; их основания равны, а вершины B_2 и B_1 лежат на прямой B_2B_1, параллельной плоскости их основания; следовательно, эти пирамиды равновелики и объем пирамиды $B_2A_2A_1C_1$ равен $\frac{1}{3}QH_a$.

Вывод: **Объем усеченной треугольной призмы равен сумме объемов трех пирамид, общее основание которых — одно из оснований треугольной призмы, а вершины — три вершины другого основания призмы.**

Итак, объем треугольной усеченной призмы

$$V=\frac{1}{3}QH_a+\frac{1}{3}QH_b+\frac{1}{3}QH_c=Q\cdot\frac{H_a+H_b+H_c}{3},$$

т. е. объем треугольной призмы равен произведению площади ее основания на среднее арифметическое расстояний вершин другого основания от плоскости первого основания.

Известно, что $\frac{H_a+H_b+H_c}{3}$ есть расстояние центра тяжести треугольника $A_2B_2C_2$ от плоскости $A_1B_1C_1$, а потому **объем усеченной треугольной призмы равен произведению площади основания и перпендикуляра, проведенного к этому основанию из центра тяжести другого основания.**

Желательно иметь соответствующее наглядное пособие, лучше каркасную модель, а также использовать геометрический ящик.

§ 56. Объем правильных многогранников.

Объемы правильных тетраэдра и октаэдра вычисляются по формулам объема пирамиды.

1) Объем правильного тетраэдра $V=\frac{1}{3}QH$. Но $Q=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где

a — ребро тетраэдра. Высота H тетраэдра находится из треугольника SOC (рис. 267), в котором

$$SC = a; \quad OC = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad H = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

и, следовательно, $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{12}\cdot a^3\cdot\sqrt{2}$ куб. ед.

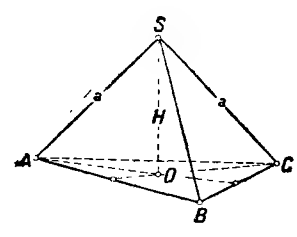


Рис. 267.

2) Объем правильного октаэдра равен сумме объемов двух правильных четырехугольных пирамид, все ребра которых равны a. Высота каждой из них равна $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, а площадь основания a^2, а потому

$$V_8 = 2\cdot\frac{1}{3}a^2\,\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \text{ куб. ед.}$$

3) Объем правильного гексаэдра — куба — равен a^3.

4) Объем правильного двадцатигранника (икосаэдра) можно вычислить, разбив его на 20 равных правильных треугольных пирамид, сторона оснований которых — a, а высота — расстояние центра многогранника до его грани, равное $\frac{a\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})$;

$$V_{20} = 20\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5}) = \frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5}) \text{ куб. ед.}$$

5) Объем правильного двенадцатигранника (додекаэдра) получается, если разбить его на 12 равных правильных пятиугольных пирамид, сторона оснований которых равна a, а высота — расстояние от центра многогранника до его грани, равное $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$;

$$V_1 = \frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5}) \text{ куб. ед.}$$

Задачи и вопросы.

1. Всякая плоскость, проходящая через диагональ параллелепипеда, делит параллелепипед пополам. Доказать.

2. Биссекторная плоскость двугранного угла треугольной пирамиды делит противолежащую грань на две части, площади которых относятся, как площади граней, образующих двугранный угол. Доказать.

3. Центры граней куба являются вершинами правильного вписанного в него октаэдра. Какую часть объема куба составляет объем октаэдра?

4. Площади двух граней треугольной пирамиды m^2 и n^2 и их общее ребро a; двугранный угол между данными двумя гранями $\alpha = 30°$. Найти объем пирамиды.

5. Основание пирамиды — параллелограм. Площади двух боковых граней — m^2 и n^2, их общее ребро — a и двугранный угол при ребре a равен $\alpha = 150°$. Найти объем пирамиды.

6. Высота пирамиды разделена на три равные части. Найти, в каком отношении делится объем пирамиды плоскостями, параллельными плоскости основания.

7. Плоскость, параллельная плоскости основания, делит боковую поверхность пирамиды пополам. В каком отношении делится объем?

8. Дан куб, ребро которого a. Плоскостями у куба срезаны при его вершинах трехгранные телесные углы пирамиды так, что все ребра пирамид, исходя-

щие из вершины куба, равны. Объем образовавшегося многогранника равен $\frac{1}{n}$ объема куба. Найти боковые ребра отсеченных пирамид.

9. Усеченная правильная четырехугольная пирамида из песчаника, удельный вес которого $\delta = 2,5$, весит p *кг*. Высота пирамиды — H *дм*: сторона одного из оснований больше стороны другого на n *дм*. Найти ребро пирамиды и ее боковую поверхность.

10. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны a и b $(a > b)$, высота ее — H. На какие части делится объем пирамиды плоскостью, проходящей через точку пересечения диагоналей пирамиды параллельно плоскостям ее оснований?

11. Как относятся объемы двух кубов, вписанных в правильный октаэдр так, что вершины одного находятся на ребрах данного октаэдра, а вершины другого лежат в центрах граней октаэдра?

Указания к вопросам и задачам.

1. Пусть дан параллелепипед $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ и пусть в нем проведены его диагонали B_1D_2 и D_1B_2 (рис. 268).

Через диагональ B_1D_2 проведем какую-нибудь плоскость, положим $K_1B_1K_2D_2$. Рассмотрим сперва диагональную плоскость; она пересекает поверхность параллелепипеда по ребрам B_1B_2 и D_1D_2 и по диагоналям B_1D_1 и B_2D_2 граней $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$. Диагональная плоскость удовлетворяет условию задачи, она делит параллелепипед на две равные конгруентные части — на две равные треугольные призмы. Указанное свойство диагональной плоскости параллелепипеда следует сопоставить со свойством диагонали параллелограма.

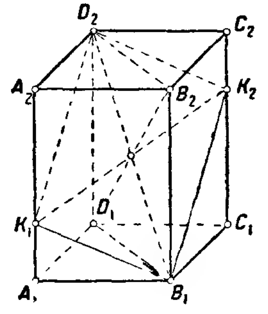


Рис. 268.

Итак, **1) диагональ параллелограма — прямая, проходящая через противолежащие его вершины, — делит параллелограм пополам; 2) диагональное сечение — плоскость, проходящая через два противолежащих ребра параллелепипеда, — делит параллелепипед пополам.**

Из планиметрии известно, что **любая прямая, проходящая через центр симметрии параллелограма, делит параллелограм на две равные части.**

Естественно предположить, что и в стереометрии имеет место для параллелепипеда аналогичная теорема; теорема: **любая плоскость, проходящая через диагональ параллелепипеда, делит параллелепипед на две равные части.**

Доказательство. Допустим, что эта плоскость есть плоскость $K_1B_1K_2D_2$. Прежде всего установим, что фигура сечения — параллелограм. Пусть плоскость, проходящая через диагональ B_1D_2 параллелепипеда, пересекает одно из ребер, положим A_1A_2, в произвольной точке K_1 (если точка взята на ребре диагонального сечения, то само диагональное сечение будет искомое и, следовательно, теорема верна), тогда B_1K_1 — прямая, по которой плоскость пересекает переднюю грань параллелепипеда и K_1D_2 — прямая, по которой плоскость пересекает левую боковую его грань. Плоскость, проходящая через диагональ B_1D_2 и точку K_1, пересекает две параллельные плоскости $A_1D_1A_2D_2$ и $B_1C_1B_2C_2$ по параллельным прямым, а потому, проведя на грани $B_1C_1B_2C_2$ прямую B_1K_2, параллельную K_1D_2, получим вершину K_2 сечения на ребре C_1C_2, и, следовательно, прямая K_2D_2 на задней грани принадлежит сечению и замыкает по поверхности параллелепипеда контур сечения. Фигура $K_1B_1K_2D_2$ — параллелограм, и плоскость сечения пересекает только 4 грани куба. Параллелограм получится, в какой бы точке ребра A_1A_2 ни лежала точка K_1; лишь в том случае, если точка K_1 лежит в одной из вершин параллелепипеда, получится одно из возможных диагональных сечений.

Заметим, что B_1D_2 служит диагональю параллелограма, а потому другая его диагональ K_1K_2 также пройдет через точку пересечения диагоналей параллелепипеда.

Итак, параллелепипед рассекается плоскостью $K_1B_1K_2D_2$ на два многогранника I и II, которые вычерчиваем отдельно, заштриховав в каждом из них сечение $K_1B_1K_2D_2$ (рис. 268а). Если повернуть I многогранник и вложить его во II так, чтобы грань $A_2B_2C_2D_2$ совпала с равной гранью $A_1B_1C_1D_1$ (вершина A_2 с C_1,

B_2 с D_1 и т. д.), то ребра A_2K_1, B_2B_1 и C_2K_2 пойдут по ребрам C_1K_2, D_1D_2 и A_1K_1, так как они образуют равные углы с совпавшими гранями, и совпадут с ними, так как все они одинаковой длины; совпадут также и плоскости сечения, следовательно, оба многогранника совпадут, и параллелепипед разделится плоскостью сечения пополам. Совпадение многогранников можно доказать и следующим образом: соединив вершину B_2 с вершинами D_2, K_1 и K_2, получим для I многогранника три пирамиды: $B_2B_1K_2D_2K_1$, $B_2K_2C_2D_2$ и $B_2D_2A_2K_1$; соединив же вершину D_1 с вершинами B_1, K_1 и K_2, получим для II многогранника три пирамиды: $D_1B_1K_2C_2K_1$, $D_1K_1A_1B_1$ и $D_1B_1C_1K_2$. Легко обнаружить, что эти пирамиды равны: первые две пирамиды $B_2B_1K_2D_2K_1$ и $D_1B_1K_2C_2K_1$, так как у них все элементы равны, совмещаются; нетрудно убедиться, что совпадут и две другие пирамиды, следовательно, и оба многогранника равны, а это значит, что параллелепипед делится плоскостью сечения пополам.

2. Строим треугольную пирамиду $SABC$ и проводим в ней биссекторную плоскость SAD. Эта плоскость делит тетраэдр на две треугольные пирамиды:

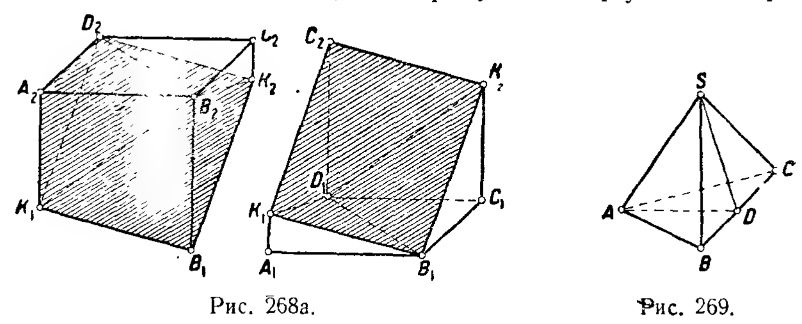


Рис. 268а. Рис. 269.

$DASC$ и $DASB$ (рис. 269). Высоты этих пирамид равны, так как любая точка биссекторной плоскости, в том числе и точка D, отстоит от граней ASC и ASB на одно и то же расстояние. В силу равенства высот объемы пирамид относятся, как площади их оснований, а потому

$$\frac{V_{DASC}}{V_{DASB}}=\frac{\text{пл. } ASC}{\text{пл. } ASB}. \qquad (1)$$

Рассмотрим затем те же пирамиды, приняв, однако, за их вершину точку A, т. е. пирамиды $ASBD$ и $ASDC$. Так как у этих пирамид общая вершина A, то и высота у них общая, а потому

$$\frac{V_{ASDC}}{V_{ASBD}}=\frac{\text{пл. } SDC}{\text{пл. } SBD}. \qquad (2)$$

Сопоставляя равенства (1) и (2), находим:

$$\frac{\text{пл. } SDC}{\text{пл. } SBD}=\frac{\text{пл. } ASC}{\text{пл. } ASB}.$$

Если, наконец, принять за вершину точку S, то получим пирамиды $SADC$ и $SADB$; у них равные высоты, следовательно,

$$\frac{V_{SADC}}{V_{SADB}}=\frac{\text{пл. } ADC}{\text{пл. } ADB}. \qquad (3)$$

Сопоставляя равенства (1), (2) и (3), находим:

$$\frac{\text{пл. } SDC}{\text{пл. } SBD}=\frac{\text{пл. } ASC}{\text{пл. } ASB}=\frac{\text{пл. } ADC}{\text{пл. } ADB}.$$

Теорема доказана. Следует обратить внимание учащихся на полную аналогию данной теоремы с соответствующей теоремой планиметрии: биссектриса внутреннего угла треугольника делит сторону треугольника на части, пропорциональные двум другим сторонам.

3. Обозначим ребро куба через a, тогда $V_{куба}=a^3$ куб. ед. Ребро октаэдра, построенного согласно указаниям задачи, равно $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, ось же октаэдра равна $a\sqrt{2}$. Находим объем октаэдра, состоящего из двух пирамид:

$$V_{окт}=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{a}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2a^2}{4}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^3}{6}\text{ куб. ед.}$$

Итак, объем октаэдра равен одной шестой части объема куба. Интересно отметить, что если предложить кому-либо определить по рисунку куба, в который вписан октаэдр, какую часть куба составляет октаэдр, обычно отвечают: октаэдр составляет, примерно, половину или треть куба; однако, как показывают вычисления, октаэдр составляет только одну шестую часть куба.

4. а) Построение. Строим треугольную пирамиду $SABC$ (рис. 270); пусть площадь грани $ABC=m^2$ и площадь грани $ASB=n^2$; высота $SO\perp$ плоскости ABC и $OK\perp AB$, и, на основании теоремы о трех перпендикулярах, $SK\perp AB$; согласно условию $\angle SKO=\alpha=30°$ и $AB=a$.

b) Решение. 1) $V=\frac{1}{3}QH=\frac{1}{3}m^2H.$

$H=?$

2) $\triangle SOK.$ $SK=2H.$ 3) $\triangle ASB.$ $\frac{a\cdot 2H}{2}=n^2;$ $H=\frac{n^2}{a}.$

4) $V=\frac{1}{3}m^2\cdot\frac{n^2}{a}=\frac{m^2\cdot n^2}{3a}$ куб. ед.

5. Строим четырехугольную пирамиду $SABCD$ (рис. 271); пл. $SAD=m^2$ и пл. $SDC=n^2$; общее их ребро $SD=a$ и двугранный угол $ASDC=150°$.

Если провести диагональное сечение SAC, то четырехугольная пирамида $SABC$ разделится на две равновеликие треугольные пирамиды. Используя прием решения предыдущей задачи, находим:

$$V=\frac{2m^2n^2}{3a}\text{ куб. ед.}$$

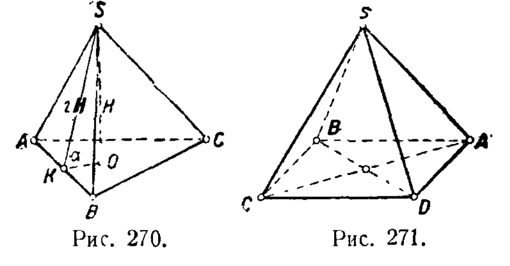


Рис. 270. Рис. 271.

6. Пусть высота пирамиды разделена на три равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Обозначив объемы трех пирамид, считая от вершины, через V_1, V_2 и V_3, объем всей пирамиды через V и высоту ее через H, находим:

$$\frac{V}{V_1}=\frac{H^3}{\frac{H^3}{27}}=27,\quad\text{откуда}\quad V_1=\frac{1}{27}V.$$

$$\frac{V}{V_1+V_2}=\frac{H^3}{\left(\frac{2H}{3}\right)^3}=\frac{27}{8},\quad\text{откуда}\quad V_1+V_2=\frac{8}{27}V\quad\text{и}\quad V_2=\frac{7}{27}V.$$

Наконец, $V_3=V-V_1-V_2=\frac{19}{27}V$; получаем искомое отношение:

$$V_1:V_2:V_3=1:7:19.$$

7. Пусть плоскость, параллельная основанию, делит боковую поверхность пирамиды на две равные части, обозначим их через S_1 и S_2, а объемы отдельных частей пирамиды, боковая поверхность которых S_1 и S_2, соответственно через V_1 и V_2, части же, на которые делится вся высота H пирамиды,— через h_1 и h_2

Плоскость отсекает от данной пирамиды пирамиду, ей подобную; из подобия пирамид находим:

а) $\frac{S_1+S_2}{S_1}=\frac{(h_1+h_2)^2}{h_1^2}$ или $\frac{(h_1+h_2)^2}{h_1^2}=2$, так как $S_1=S_2$ или $\frac{h_1+h_2}{h_1}=\sqrt{2}$.

б) $\frac{V_1+V_2}{V_1}=\frac{(h_1+h_2)^3}{h_1^3}$ или $\frac{V_1+V_2}{V_1}=(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$.

$$1+\frac{V_2}{V_1}=2\sqrt{2}, \text{ откуда } \frac{V_2}{V_1}=2\sqrt{2}-1.$$

8. Длину боковых ребер отсеченных пирамид обозначим через x и примем одну из граней пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами x и x — за основание пирамиды; понятно, что и высота отсеченной пирамиды также равна x, а потому объем одной пирамиды равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\cdot x=\frac{x^3}{6}$, объем же всех восьми пирамид равен $\frac{8x^3}{6}=\frac{4}{3}x^3$; согласно условию, $\frac{4}{3}x^3=\frac{a^3}{n}$, где a^3—объем куба, а потому:

$$x=\sqrt[3]{\frac{3a^3}{4n}}=\frac{a}{2}\sqrt[3]{\frac{6}{n}}.$$

При $n=6$ ребро $x=\frac{a}{2}$.

9. Вычерчивается усеченная четырехугольная правильная пирамида (рис. 272). Из условий задачи вычисляется ее объем, $V=\frac{P}{\delta}$ *дм*^{3}. Задача должна быть использована для повторения с учащимися соотношения между весом тела, его удельным весом и объемом.

Требуется найти ребро и боковую поверхность пирамиды. Обозначим сторону меньшего основания через x, сторону большего основания, согласно условию задачи, через $x+n$, и, наконец, боковое ребро через y.

Итак, надлежит найти x, y и $S_{бок}=\frac{P_1+P_2}{2}\cdot b$, где $P_1=4(x+n)$, $P_2=4x$ и b — апофема пирамиды.

Следует иметь в виду, что при решении задач на усеченную пирамиду выделяют обычно для большей наглядности или 1) диагональное сечение — обычно, если требуется найти угол наклона ребра к плоскости основания, или 2) сечение, проходящее через две противолежащие апофемы пирамиды,— обычно, если требуется найти угол наклона грани к плоскости основания, или 3) сечение, проходящее через ребро и противолежащую апофему,— при нечетном числе граней, и вычерчивают отдельно требуемое сечение в вертикальной плоскости чертежа.

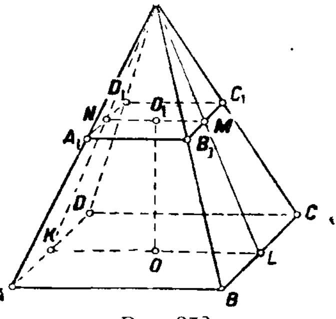


Рис. 272.

Рис. 272а.

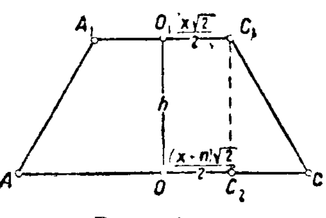


Рис. 272б.

Для нахождения x, b и h — высоты усеченной пирамиды — вычерчиваем отдельно сечение $KLMN$ — второе из указанных сечений (рис. 272а). Для получения y используем диагональное сечение AA_1C_1C (рис. 272б).

Решение. 1) Проводим в сечении $KLMN$ высоты MM_1 и NN_1 трапеции; из треугольника MM_1L находим:

$$b^2 - h^2 = \frac{n^2}{4}, \quad \text{ибо} \quad ML = \frac{x + n - x}{2} = \frac{n}{2},$$

так что

$$b = \sqrt{\frac{4h^2 + n^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + n^2}.$$

2) Проводим в трапеции ACC_1A_1 высоты C_1C_2 и A_1A_2 и находим из треугольника C_1C_2C:

$$y^2 = h^2 + \left(\frac{(x+n)\sqrt{2}}{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad \text{или} \quad y^2 = h^2 + \left(\frac{n\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

откуда

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + 2n^2}$$

3) Из трапеций, полученных в сечениях, не удается найти x; для нахождения x используем формулу $V = \frac{P}{\delta}$.

Объем пирамиды $\frac{P}{\delta} = \frac{1}{3} h\,[(x+n)^2 + x^2 + x(x+n)]$, откуда находим x:

$$\frac{P}{\delta} = \frac{h}{3}(3x^2 + n^2 + 3xn) \quad \text{или} \quad 3x^2 + 3xn + n^2 - \frac{3P}{\delta h} = 0,$$

$$3\delta h x^2 + 3\delta h n x + (\delta n^2 h - 3P) = 0$$

и

$$x = \frac{-3\delta hn + \sqrt{9\delta^2h^2n^2 - 12\delta h(\delta n^2 h - 3P)}}{6\delta h} = \frac{-3\delta hn + \sqrt{36\delta hP - 3\delta^2h^2n^2}}{6\delta h} =$$

$$= \frac{\sqrt{3\delta h(12P - \delta hn^2)} - 3\delta hn}{6\delta h}.$$

Отрицательное решение x отбрасываем.

4) Находим боковую поверхность:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(4x + 4x + 4n)\,b = 2(2x+n)\,b =$$

$$= 2\left[\frac{\sqrt{3\delta h(12P - \delta hn^2)} - 3\delta hn}{3\delta h} + n\right] \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + n^2} =$$

$$= \frac{1}{3\delta h}\sqrt{3\delta h(12P - \delta hn^2)(4h^2 + n^2)} = \sqrt{\frac{(12P - \delta hn^2)(4h^2 + n^2)}{3\delta h}} \text{ кв. ед.}$$

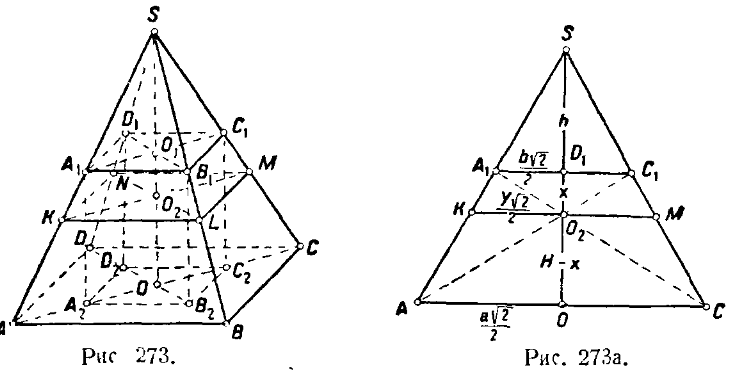


Рис 273. Рис. 273а.

10. Допустим, что пирамида уже построена, и ее основание $A_1B_1C_1D_1$ спроектировано на плоскость основания $ABCD$ (рис. 273). Рассмотрим полученную

правильную четырехугольную призму $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$, сторона основания которой равна b и высота H; диагональ основания этой призмы равна тогда $b\sqrt{2}$, она же является диагональю верхнего основания пирамиды.

Построение. Строим правильную четырехугольную призму по данной стороне ее основания b и высоте H. Продолжив затем диагональ основания так, чтобы $OA = OC = OB = OD = a\sqrt{2}$, где a — сторона нижнего основания усеченной пирамиды, проводим через точки A и A_1, B и B_1, C и C_1, D и D_1 прямые, и тогда получим искомую пирамиду. Если построение выполнено правильно, то продолжения боковых ребер усеченной пирамиды должны пересечься в одной точке, точке S.

Согласно условию задачи требуется еще провести через точку пересечения O_2 диагоналей усеченной пирамиды плоскость, параллельную основаниям; для этого проводим в плоскостях диагональных сечений ASC и BSD через точку пересечения O_2 прямые $KM \parallel AC$ и $LN \parallel BD$ и через эти прямые заданную плоскость $KLMN$.

Решение. Объем данной усеченной пирамиды $V = \frac{1}{3}H(a^2 + b^2 + ab)$ делится плоскостью $KLMN$ на две части. Обозначим объем одной части через V_1, другой — через V_2. Для вычисления объемов V_1 и V_2 требуется найти площадь Q плоскости сечения и высоты пирамид $O_1O_2 = x$ и $OO_2 = H - x$. Обозначим высоту SO_1 через h и сторону KL сечения через y, так что $Q = KL^2 = y^2$.

В целях более наглядного выяснения зависимостей между отдельными элементами фигуры следует вычертить отдельно диагональное сечение ASC с теми отрезками, которые требуется найти (рис. 273а).

1) $\triangle AO_2C \backsim \triangle A_1O_2C_1$, а потому

$$\frac{a\sqrt{2}}{b\sqrt{2}} = \frac{H - x}{x} \quad \text{или} \quad \frac{a}{b} = \frac{H}{x} - 1; \quad \frac{H}{x} = \frac{a+b}{b}; \quad x = \frac{bH}{a+b}. \qquad (1)$$

2) $\triangle AC_1C \backsim \triangle O_2C_1M$, а потому

$$\frac{a\sqrt{2}}{y\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{H}{x} \quad \text{или} \quad \frac{2a}{y} = \frac{H(a+b)}{b.H}; \qquad y = \frac{2ab}{a+b}. \qquad (2)$$

3) Найдя значения для x и y, находим:

$$V_1 = \frac{x}{3}(y^2 + b^2 + by) = \frac{1}{3}\cdot\frac{bH}{a+b}\left[\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 + b^2 + \frac{2ab^2}{a+b}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{bH}{a+b}\left(\frac{4a^2b^2 + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 + 2a^2b^2 + 2ab^3}{(a+b)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{bH}{(a+b)^3}(7a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) = \frac{b^3H}{3(a+b)^3}(7a^2 + 4ab + b^2) \text{ куб. ед.}$$

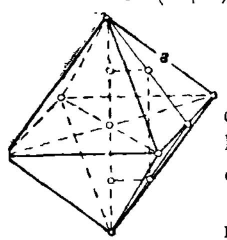


Рис. 274.

Так же находится и $V_2 = \frac{H - x}{3}(a^2 + y^2 + ay)$ куб. ед.

11. Согласно условиям задачи вычерчиваем октаэдр и вписанные в него два куба (рис. 274). Ребро октаэдра обозначим через a. Ребро куба, вершины которого лежат в центрах граней октаэдра, равно $\frac{1}{3}$ оси октаэдра, равной $a\sqrt{2}$, т. е. $\frac{1}{3}a\sqrt{2}$, а потому объем этого куба $V_1 = \left(\frac{1}{3}a\sqrt{2}\right)^3 = \frac{2a^3\sqrt{2}}{27}$ куб. ед. (стоит только пересечь октаэдр плоскостью, проходящей через противолежащие апофемы его граней, чтобы убедиться в этом).

Проведя затем сечение через противолежащие ребра октаэдра и обозначив ребро куба через x, находим:

$$\frac{a\sqrt{2}}{x\sqrt{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}} \quad \text{или} \quad a^2\sqrt{2} - ax = ax\sqrt{2},$$

откуда

$$x=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}=a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$$

Итак, объем куба, вершины которого лежат на ребрах октаэдра, равен

$$V_2=[a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)]^3=2a^3\sqrt{2}(2\sqrt{2}-3\cdot 2+3\sqrt{2}-1)=$$
$$=2a^3\sqrt{2}(5\sqrt{2}-7).$$

Находим отношение объемов V_2 и V_1 кубов:

$$V_2:V_1=2a^3\sqrt{2}(5\sqrt{2}-7):\frac{2a^3\sqrt{2}}{27}=(5\sqrt{2}-7):\frac{1}{27}.$$

§ 57. Призматоид.

1. *Призматоидом называется вообще всякое тело, имеющее прямолинейные ребра, концы которых лежат на двух параллельных плоскостях P и Q (рис. 275); при этом в сечении такого тела любой плоскостью, параллельной плоскостям P и Q, получаются прямолинейные фигуры.*

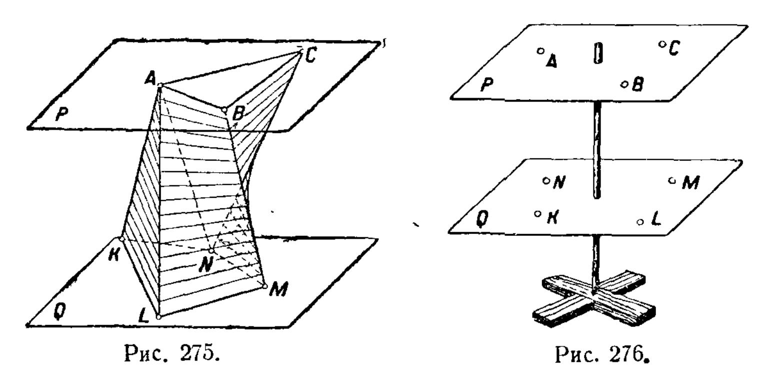


Рис. 275. Рис. 276.

Полезно изготовить с учащимися модель призматоида. Для этого устанавливается вертикально стержень (рис. 276); на него надевают две дощечки из фанеры или картона, представляющие собой модели плоскостей P и Q, причем отверстия в дощечках делаются с таким расчетом, чтобы модели плоскостей P и Q держались на стержне и могли бы быть практически параллельными. На P и Q берется любое число точек, например на P три точки: A, B и C и на Q четыре точки: M, N, K и L. Через отверстия, которые делаются в отмеченных точках, пропускают шнуры, и для того, чтобы они были всегда в натянутом положении, к каждому из шнуров в конце его привешивается по небольшому грузику. Шнуры прикрепляются к точкам A, B и C и пропускаются через отверстия K, L, M и N примерно в следующем порядке: из точки A через K, L и N, из точки B через M, L и K, из точки C через M и N. Отрезки шнуров между плоскостями P и Q представляют собой ребра многогранника, называемого призматоидом; на дощечках следует выделить краской или тушью треугольник ABC и черырехугольник $KLMN$, лежащие в параллельных плоскостях P и Q. Если вращать верхнюю или нижнюю дощечки вокруг стержня в одном каком-нибудь направлении,

то получатся многие виды призматоидов с неизменяющимися основаниями.

Если призматоид ограничен с боков только плоскостями, он называется прямым (рис. 277), в противном случае он называется косым; косой призматоид ограничен как плоскостями, так и кривыми поверхностями, на которых помещается бесчисленное множество прямых линий (рис. 275). С такими поверхностями приходится встречаться при постройке на верфях, на крышах и т. п.

Если какое-либо ребро одного из оснований призматоида параллельно ребру другого основания, то грань призматоида — трапеция; если же два ребра призматоида равны и параллельны, то грань призматоида — параллелограм (рис. 278). Все это можно проследить на соответствующей модели.

Частным видом прямого призматоида является усеченная пирамида и в частном случае ее разновидности: пирамида, призма, параллелепипед. Рассматриваемые иногда в задачах тела под названием понтона или клина также являются частными случаями призматоида.

Под понтоном понимают такой призматоид, основания которого пря-

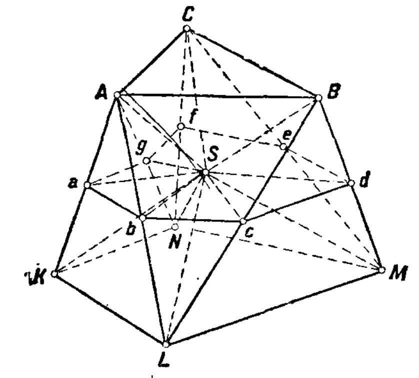


Рис. 277.

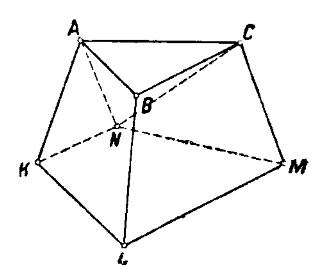


Рис. 278.

моугольники, а боковые грани трапеции, основания которых являются сторонами прямоугольников, лежащих в основаниях призматоида. Учащиеся нередко смешивают понтон с усеченной пирамидой, тогда как последняя, вообще говоря, является только частным случаем понтона, основания которого подобные и подобно расположенные прямоугольники.

Клином называется усеченная треугольная призма, у которой за основание принята боковая грань и, таким образом, другим основанием является противолежащее ребро.

2. Пусть дан призматоид $KLMNABC$ (рис. 277). Проведем в нем сечение плоскостью, проходящей через середину его высоты H; плоскость эта разделит все его боковые ребра пополам, а потому для получения указанного сечения достаточно провести средние линии боковых граней призматоида; это сечение — многоугольник $abcdefg$, вообще говоря, не выпуклый.

Возьмем где-либо на плоскости среднего сечения призматоида точку S и соединим ее со всеми вершинами призматоида A; B, C, K, L, M, N; получим столько пирамид, сколько граней у призматоида. Так, призматоид, изображенный на рис. 277, разобьется по числу граней на 9 пирамид: $SABC$, $SBCM$, $SMCN$, $SACN$, $SANK$, $SAKL$, $SABL$, $SBLM$ и

$SKLMN$; первая и последняя из этих пирамид имеют своими основаниями основания призматоида, остальные — боковые грани.

Обозначим объемы пирамид $SKLMN$ и $SABC$ через V_1 и V_2, площади их оснований через Q и q; высота каждой из них равна $\frac{H}{2}$, а потому

$$V_1 = \frac{1}{3} Q \cdot \frac{H}{2} = \frac{1}{6} QH \text{(куб. ед.) и } V_2 = \frac{1}{3} q \frac{H}{2} = \frac{1}{6} qH \text{(куб. ед.)}.$$

Вычислим также объем одной из пирамид, основанием которой служит одна из боковых граней призматоида, например объем пирамиды $SLMB$; вычертим ее отдельно (рис. 279) и соединим вершину ее S с точками c и d на грани LMB. Полученным сечением Scd пирамида делится на две части: на пирамиду $BScd$ и пирамиду $SLMdc$. Объем пирамиды $BScd$ равен $\frac{1}{3}$ (пл. Scd) $\cdot \frac{H}{2} = \frac{H}{6}$ (пл. Scd) и составляет четверть объема всей пирамиды $SLMB$. В самом деле, пирамиды $SBcd$ и $SLMB$ имеют общую вершину S, а следовательно, и равные высоты, так

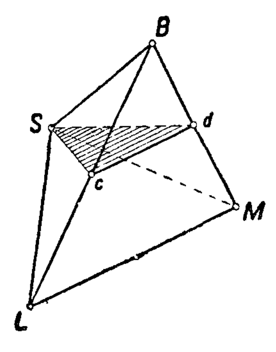


Рис. 279.

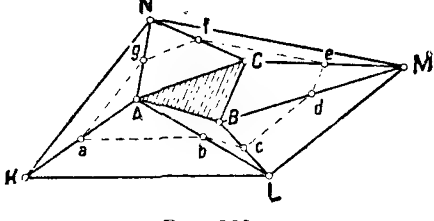


Рис. 280.

как основания их лежат в одной плоскости; но площадь основания Bcd пирамиды $SBcd$ составляет $\frac{1}{4}$ площади основания BLM пирамиды $SLMB$, ибо линейные размеры треугольника Bcd вдвое меньше размеров треугольника LMB; отсюда следует, что объем пирамиды $SLBM = 4 \cdot \frac{H}{6}$ (пл. Scd) $= \frac{2}{3} H$ (пл. Scd). Так же находим объемы всех остальных пирамид, основания которых — остальные боковые грани призматоида. Суммируя объемы всех этих пирамид и вынося за скобки общий их множитель $\frac{2}{3} H$, получим:

$$\frac{2}{3} H \cdot (\text{пл. } Scd + \text{пл. } S1e + \text{пл. } Sef + \text{пл. } Sfg + \text{пл. } Sga + \text{пл. } Sab + \text{пл. } Sbc).$$

Выражение, заключенное в скобки, есть $Q_{ср}$ — площадь среднего сечения призматоида, а потому сумма объемов всех пирамид, основания которых — боковые грани призматоида, равна $\frac{2}{3} H \cdot Q_{ср}$. Объем же всего призматоида равен

$$V = \frac{1}{6} QH + \frac{1}{6} QH + \frac{2}{3} Q_{ср}H = \frac{1}{6} H (Q + q + 4Q_{ср}) \text{ (куб. ед.)}.$$

Формула эта называется формулой Ньютона-Симпсона. Мы рассматривали призматоид, у которого при ортогональном проектировании одного

из его оснований на другое первое проектируется внутри контура второго (рис. 280). На рис. 280 проекция ABC основания ABC на плоскость другого основания расположена внутри контура $KLMN$. Проекциями ребер будут AK, AL, BL, BM, CM, CN и AN. Соединив середины проекций ребер, получим многоугольник $abcdefg$. Легко видеть, что этот последний многоугольник есть проекция среднего сечения на плоскость $KLMN$, так как проекциями середины отрезков являются середины проекций отрезков. Если мы соединим не середины проекций ребер, а точки, в которых они делятся в одном и том же отношении, считая от вершин основания $KLMN$, то получится многоугольник, который равен соответствующему параллельному сечению, плоскость которого делит высоту призматоида в том же отношении, считая от плоскости основания $KLMN$.

Установим зависимость площади S любого параллельного сечения в призматоиде $ABCKLMN$ от расстояния его от плоскости основания. Заметим прежде всего, что при указанном выше условии проекция любого сечения призматоида также расположится внутри контура $KLMN$ и площадь сечения, проведенного параллельно основанию $KLMN$ на расстоянии x от него, можно найти как разность между площадью Q основания $KLMN$ и суммой площадей треугольников Lbc, Mdc, Nfg и трапеций $KNga$, $KLba$, $LMdc$ и $MNfe$.

На основании свойств параллельных сечений пирамид имеем:

$$\frac{\text{пл. } ABL}{\text{пл. } bcL} = \frac{h^2}{x^2} \quad \text{и} \quad \text{пл. } bcL = \frac{\text{пл. } ABL}{h^2} x^2;$$

$$\frac{\text{пл. } LBM}{\text{пл. } cBd} = \frac{h^2}{(h-x)^2} \quad \text{или} \quad \frac{\text{пл. } LBM - \text{пл. } cBd}{\text{пл. } LBM} = \frac{h^2-(h-x)^2}{h^2} = \frac{2hx-x^2}{h^2}$$

и

$$\text{пл. } LBM - \text{пл. } cBd = \text{пл. } LMdc = \frac{(\text{пл. } LBM)(2hx-x^2)}{h^2}.$$

Площади треугольников — граней призматоида — определенные числа, а потому сумма всех вычитаемых площадей треугольников (обозначим ее

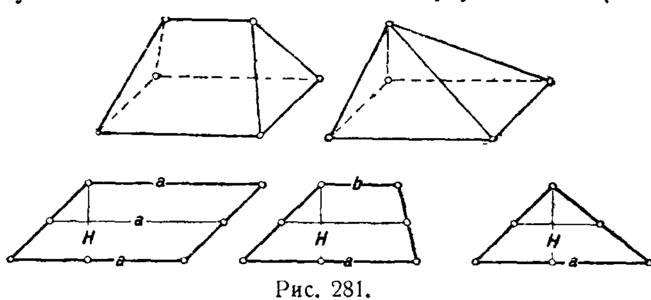


Рис. 281.

через $S_\triangle$) будет функция x вида mx^2, а сумма всех вычитаемых площадей трапеций (обозначим ее через $S_{\square}$) будет функцией вида nx^2+px, и площадь параллельного сечения $Q_{ср} = Q - S_\triangle - S_{\square}$ есть функция вида ax^2+bx+c, где a, b и c — коэфициенты, полученные после приведения подобных членов.

Итак, любое параллельное сечение призматоида есть функция второй степени его расстояния от основания призматоида.

Если продолжить проекции ребер на рис. 280, то увидим, что они не пересекаются в одной точке. Если бы они пересеклись в одной точке, то мы имели бы дело не с общим призматоидом, а с его частным случаем — с усеченной пирамидой, для площади сечения которой этот закон установлен.

3. Большинство тел, рассматриваемых в элементарном курсе геометрии, удовлетворяют этому условию, а потому их объемы могут быть вычислены по формуле объема призматоида $V=\frac{H}{6}(Q+q+4Q_{ср})$. Следует заметить, что одно из оснований призматоида может выродиться в отрезок и даже в точку, и тогда $q=0$ (рис. 281), призматоид же соответственно принимает форму клина или пирамиды. Может случиться, что не только одно основание, но и второе основание призматоида выродится в прямую или точку, и тогда тело может выродиться в планиметрический образ, а вместо объема придется иметь дело с площадью, а вместо площади — с отрезком.

На самом деле, имеем (рис. 281):

для параллелограма $S_{\square}=\frac{H}{6}(a+a+4a)=aH$;

для трапеции $S_{⏢}=\frac{H}{6}\left(a+b+4\cdot\frac{a+b}{2}\right)=\frac{a+b}{2}\cdot H$;

для треугольника $S_{\triangle}=\frac{H}{6}\left(a+O+4\cdot\frac{a}{2}\right)=\frac{aH}{2}$.

Вычисление объемов призмы, пирамиды и усеченной пирамиды по формуле объема призматоида дано в стабильном учебнике.

4. Задачи на применение формулы объема призматоида.

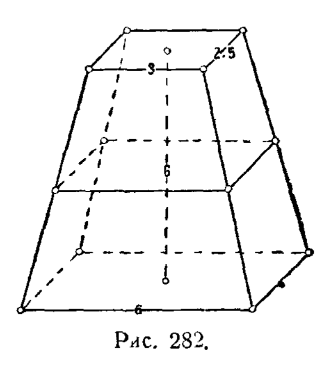


Рис. 282.

Задача 1. Найти объем шестигранника, основания которого — два прямоугольника с параллельными сторонами $a=6$ *дм*, $b=4$ *дм*, $a_1=3$ *дм* и $b_1=2,5$ *дм* и высотой $h=6$*дм* (рис. 282). Такое тело называется п о н т о н о м.

Р е ш е н и е. Используется формула объема призматоида. Находим Q, q, $Q_{ср}$ и подставляем их значения в соответствующую формулу:

$$Q=ab=24;$$
$$q=a_1b_1=7,5;$$
$$4Q_{ср}=4\cdot\frac{a+a_1}{2}\cdot\frac{b+b_1}{2}=4\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{13}{4}=58,5;$$
$$V=\frac{6}{6}(24+7,5+58,5)=90 \text{ куб. } дм.$$

Задача 2. Найти объем чердачного помещения, план которого представляет собой трапецию с параллельными сторонами a и c и высотой h_1; высота конька, параллельного основанию (полу) чердака, равна h, а длина конька b $(a>c>b)$ (рис. 283, 284).

Решение. Находим Q, q и Q_{cp}:

$$Q=\frac{a+c}{2}\cdot h_1, \quad q=0;$$

$$Q_{cp}=\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}\right)\cdot\frac{h_1}{4}=\frac{a+2b+c}{2}\cdot\frac{h_1}{4};$$

$$V=\frac{H}{6}(Q+q+4Q_{cp})=\frac{h}{6}\left(\frac{a+c}{2}\cdot h_1+4\cdot\frac{a+2b+c}{2}\cdot\frac{h_1}{4}\right)=$$

$$=\frac{h\cdot h_1}{6}(a+b+c)=\frac{h\cdot h_1}{2}\cdot\frac{a+b+c}{3} \text{ куб. ед.}$$

Чердачное помещение представляет собой непараллельно усеченную треугольную призму, площадь ее поперечного сечения равна $\frac{h\cdot h_1}{2}$, и мы пришли к уже знакомому нам выводу.

Так же вычисляется объем клина.

5. Мы видели, что любое сечение призматоида, параллельное основанию, есть функция второй степени вида ax^2+bx+c расстояния x сечения от основания. Докажем, что объем всякого тела, сечение которого есть

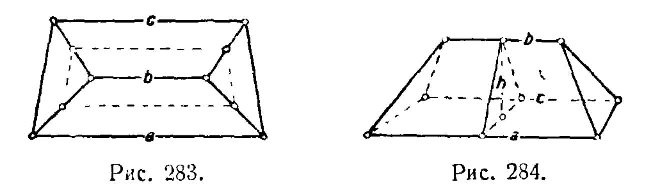


Рис. 283. Рис. 284.

функция вида $a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$, т. е. функция не выше третьей степени расстояния x сечения от основания, вычисляется по формуле Ньютона-Симпсона

$$V=\frac{H}{6}(Q+q+4Q_{cp}).$$

Пусть дано какое-нибудь тело $ABCD$, основания которого параллельны и высота которого h. Разделим высоту h на n равных частей и проведем через точки деления плоскости, параллельные основаниям; эти плоскости рассекут тело на n слоев; высота каждого слоя равна $\frac{h}{n}$. Объем тела $ABCD$ можно рассматривать как предел $V=\frac{h}{n}(Q_1+Q_2+\ldots+Q_n)$, когда $n\to\infty$, где Q_1, $Q_2\ldots Q_n$ — площади сечений.

Согласно условию

$$Q_1=a_1\frac{h^3}{n^3}+a_2\frac{h^2}{n^2}+a_3\frac{h}{n}+a_4;$$

$$Q_2=a_1\frac{2^3h^3}{n^3}+a_2\frac{2^2h^2}{n^2}+a_3\frac{2h}{n}+a_4;$$

. . . .

$$Q_n=a_1\frac{n^3h^3}{n^3}+a_2\frac{n^2h^2}{n^2}+a_3\frac{nh}{n}+a_4,$$

откуда

$$Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = a_1 \frac{h^3}{n^3}(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) +$$

$$+ a_2 \frac{h^2}{n^2}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + a_3 \frac{h}{n}(1 + 2 + \ldots + n) + na_4,$$

но

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

а потому

$$Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n =$$

$$= \frac{a_1 h^3}{n^3} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{a_2 h^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{a_3 h}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + a_4 \cdot n =$$

$$= \frac{a_1 h^3}{n} \cdot \frac{(n+1)^2}{4} + \frac{a_2 h^2}{n} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{a_3 h}{2}(n+1) + a_4 n$$

и

$$V = \frac{h}{n}\left[\frac{a_1 h^3}{n} \cdot \frac{(n+1)^2}{4} + \frac{a_2 h^2}{n} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{a_3 h}{2}(n+1) + a_4 n\right] =$$

$$= \frac{a_1 h^4}{4n^2}(n^2 + 2n + 1) + \frac{a_2 h^3}{6n^2}(2n^2 + 3n + 1) + \frac{a_3 h^2}{2n}(n+1) + a_4 h =$$

$$= \frac{a_1 h^4}{4} + \frac{a_1 h^4}{2n} + \frac{a_1 h^4}{4n^2} + \frac{a_2 h^3}{3} + \frac{a_2 h^3}{2n} + \frac{a_2 h^3}{6n^2} + \frac{a_3 h^2}{2} + \frac{a_3 h^2}{2n} + a_4 h.$$

При $n \to \infty$ мы получаем, что слагаемые II, III, V, VI и VIII будут бесконечно-малые, а потому

$$\text{предел } V_{n \to \infty} = \frac{1}{4} a_1 h^4 + \frac{1}{3} a_2 h^3 + \frac{1}{2} a_3 h^2 + a_4 h =$$

$$= \frac{h}{6}\left(\frac{3}{2} a_1 h^3 + 2a_2 h^2 + 3a_3 h + 6a_4\right).$$

Согласно условию

$$Q_0 = a_4,$$

$$Q_n = a_1 h^3 + a_2 h^2 + a_3 h + a_4,$$

$$Q_{ср} = a_1 \frac{h^3}{8} + a_2 \frac{h^2}{4} + a_3 \frac{h}{2} + a_4,$$

а потому

$$Q_0 + Q_n + 4Q_{ср} = \frac{3}{2} a_1 h^3 + 2a_2 h^2 + 3a_3 h + 6a_4.$$

Следовательно,

$$\text{предел } V_{n \to \infty} = \frac{h}{6}(Q_0 + Q_n + 4Q_{ср})$$

и объем

$$V_{\text{призматоида}} = \frac{h}{6}(Q_0 + Q_n + 4Q_{ср}),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, формула Ньютона-Симпсона может быть применена для вычисления всякого тела, относительно которого можно установить, что площадь любого сечения его, параллельного плоскости основания его, есть формула вида

$$a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4,$$

где x — расстояние плоскости сечения от основания; при этом некоторые коэфициенты при x и даже все три могут оказаться и нулями; в последнем случае площадь сечения не зависит от x, т. е. она функция нулевого измерения относительно x. Так, например, она может быть применена к телам вращения, к цилиндру, конусу, шару и другим, как это будет показано в разделе о телах вращения.

ГЛАВА XI.

КРУГЛЫЕ ТЕЛА. МЕТОДИКА ВОПРОСА.

§ 58. Цилиндр.

Учащимся должно быть дано понятие об образовании цилиндрической поверхности и цилиндра. Разъясняется, что цилиндрическая поверхность есть поверхность, которая получается параллельным перемещением прямой AB — образующей, одновременно скользящей вдоль некоторой кривой

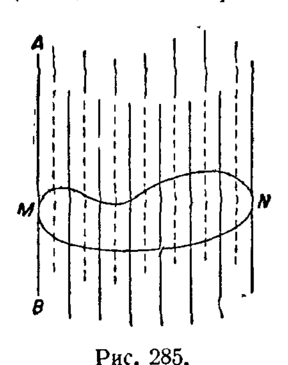


Рис. 285.

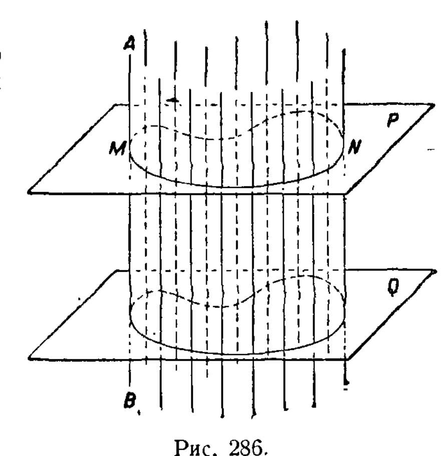


Рис. 286.

линии MN — направляющей (рис. 285), где AB ие лежит в той же плоскости, в которой находится MN, если последняя — плоская кривая.

Показывается образование цилиндра, который получается, если пересечь цилиндрическую поверхность двумя параллельными плоскостями P и Q (рис. 286). Будем рассматривать цилиндрическую поверхность с направляющей — замкнутой кривой.

Дается определение:

Цилиндр — тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя пересекающими ее параллельными плоскостями.

Одновременно даются наименования отдельных элементов и линий цилиндра. Параллельные сечения *A* и *B* цилиндра — его основания, кривая его поверхность — боковая поверхность цилиндра, расстояние OO_1 между плоскостями его оснований — высота цилиндра. Необходимо остановиться на разъяснении понятий: прямой и наклонный цилиндр. Так, в прямом цилиндре образующие перпендикулярны к плоскостям его оснований, в наклонном же образующие не перпендикулярны к плоскостям оснований цилиндра.

Учащимся также должно быть указано, что цилиндр, основания которого — круги, называется круговым цилиндром, что прямой круговой цилиндр обычно называется просто цилиндром и что прямая OO_1, соединяющая центры оснований кругового цилиндра, называется его осью.

Следует обратить внимание учащихся на то, что любая образующая прямого кругового цилиндра, как и отрезок OO_1, соединяющий центры его оснований, может служить высотой цилиндра.

Должно быть еще отмечено, что прямой круговой цилиндр есть тело вращения и получается вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон, как вокруг оси. Отмечается, что сторона прямоугольника, параллельная оси вращения, описывает при вращении цилиндрическую поверхность, стороны же прямоугольника, перпендикулярные к оси вращения, описывают равные круги — основания цилиндра — и служат радиусами этих кругов.

Сечения цилиндра.

1. После ознакомления учащихся с образованием цилиндра и различными видами цилиндров следует рассмотреть, во-первых, сечения прямого кругового цилиндра плоскостями, параллельными плоскостям оснований, а следовательно, перпендикулярными к оси цилиндра и дающими в сечении круги, равные основаниям цилиндра, во-вторых, сечения, параллельные оси, а следовательно, перпендикулярные к плоскостям оснований и дающие в сечении прямоугольники, наибольший из которых — осевое сечение, основание которого — диаметр, а высота — высота цилиндра. Весьма полезно при этом подчеркнуть аналогию между сечениями цилиндра, проведенными параллельно оси цилиндра, и их расстояниями от оси, с одной стороны, и хордами круга и их расстояниями от центра круга — с другой. Этой аналогией следует воспользоваться для повторения некоторых вопросов планиметрии.

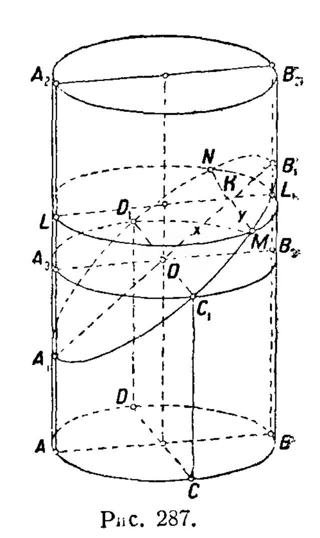


Рис. 287.

Может быть дана, например, и следующая задача. Даны два прямых круговых цилиндра одинаковой высоты, основания которых лежат на одной и той же плоскости; расстояние между их осями равно 5, 8, 10 *см*, их радиусы *R* и *r* соответственно равны 2 и 1,3; 2,5 и 8 *см*. Как расположены цилиндры относительно друг друга? Вычислить площадь сечения общего обоим цилиндрам, если $R=5$, $r=4$ и расстояние между их центрами $d=7$ *см*, $d=0$, $d=9$ *см*. Наконец, следует рассмотреть сечения, получаемые при условии, если плоскость сечения образует с осью угол,

не равный прямому; в последнем случае в сечении получается эллипс — плоская замкнутая криволинейная выпуклая фигура $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 287), все точки которой имеют одинаковую сумму расстояний от двух точек, называемых фокусами (на рис. 287 изображен эллипс — сечение плоскостью, перпендикулярной к вертикальной плоскости чертежа). Сечения цилиндра, в том числе и эллипс, следует показать учащимся на модели.

2. Разумеется, учащимся должно быть показано, как строить изображение цилиндра и его сечений, а также развертки боковой и полной поверхности цилиндра. При построении развертки цилиндра необходимо обратить внимание учащихся на то, что боковая поверхность прямого кругового цилиндра развертывается в прямоугольник, одна из сторон которого равна $2\pi R$ — длине окружности основания, другая его сторона — образующей l или высоте H цилиндра.

Равные и подобные цилиндры.

1. Не лишне рассмотреть с учащимися конгруентные и подобные прямые круговые цилиндры. Следует начертить два прямых круговых цилиндра, имеющие конгруентные осевые сечения, причем высота и диаметр основания одного служат соответственно диаметром основания и высотой другого цилиндра. Понятно, что такие цилиндры не конгруентны, хотя их осевые сечения и конгруентные *прямоугольники; исключением является тот случай, когда осевые сечения* обоих цилиндров — равные квадраты. Отсюда следует, что **два прямых круговых цилиндра конгруентны, если их образующие и диаметры соответственно равны.**

2. Что касается подобия цилиндров, то два цилиндра называются подобными, если у них соответствующие образующие и диаметры пропорциональны, т. е.

$$\frac{l}{l_1} = \frac{D}{D_1} = \frac{H}{H_1} = \frac{R}{R_1}.$$

Понятно, что два цилиндра будут подобными и в том случае, если они образованы вращением двух подобных прямоугольников вокруг сходственных сторон.

***Теорема.* Площади оснований двух подобных цилиндров относятся, как квадраты их высот.**

Пусть H и H_1 — высоты, S и S_1 — площади оснований и R и R_1 — радиусы оснований двух подобных цилиндров.

Имеем:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\pi R^2}{\pi R_1^2} = \frac{R^2}{R_1^2},$$

но

$$\frac{R}{R_1} = \frac{H}{H_1}, \quad \text{следовательно,} \quad \frac{S}{S_1} = \frac{H^2}{H_1^2}.$$

Поверхность и объем цилиндра.

1. К задаче вычисления поверхности и объема цилиндра могут быть подходы различной строгости, подобно тому, как это имело место при нахождении длины окружности.

Так, можно рассматривать цилиндр как правильную призму с неограниченно большим числом граней. Если исходить из этого, то определяют боковую поверхность прямого кругового цилиндра, т. е. площадь его кривой поверхности как предел, к которому стремится площадь боковой поверхности вписанной в цилиндр или описанной около него правильной призмы при неограниченном удвоении числа граней боковой поверхности. Применяя формулу поверхности прямой призмы $S_{бок.\ пр} = P \cdot H$ кв. ед., где P — периметр основания, а H — высота, получают:

$$S_{бок.\ ц} = 2\pi R \cdot H \text{ кв. ед., так как } \lim_{n\to\infty} P_n = C = 2\pi R.$$

Другой, более полный, не совершенно строгий подход заключается в том, что боковую поверхность цилиндра рассматривают как предел боковых поверхностей правильных вписанных или описанных призм при неограниченном удвоении числа их граней, где предварительно доказывается, что поверхности вписанной и описанной призмы имеют общий предел.

В самом деле, 1) покажем, что $S_{в.п}$ имеет предел. $S_{в.п} = p_n \cdot l$, где p_n — периметр вписанного многоугольника — монотонно возрастающая величина, когда n возрастает; отсюда следует, что $S_{в.п}$ — монотонно возрастающая величина, когда n возрастает. Понятно, что $S_{в.п} < S_{о.п}$, и, в частиости, если возьмем поверхность описанной призмы, основанием которой является правильный четырехугольник, то $S_{в.п} < 8R \cdot H$; отсюда заключаем, что $S_{в.п}$ имеет предел; обозначим этот предел через A, и тогда получим соотношение $S_{в.п} = A + \varepsilon_1$, где ε_1 — бесконечно-малая.

2) Покажем, что у площадей боковых поверхностей вписанных и описанных призм пределы общие, если n безгранично возрастает.

Действительно,

$$\begin{array}{c} S_{о.п} = P_n \cdot l \\ S_{в.п} = p_n \cdot l \\ \hline S_{о.п} - S_{в.п} = P_n \cdot l - p_n \cdot l = l\,(P_n - p_n). \end{array}$$

$P_n - p_n$ = бесконечно-малой, если n возрастает, что показано в первой части настоящей книги, а потому $S_{о.п} - S_{в.п}$ — бесконечно-малая; обозначая последнюю через ε_2, получим $S_{о.п} = S_{в.п} + \varepsilon_2 = A + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = A + \varepsilon_3$ и, таким образом,

$$\lim_{n\to\infty} S_{в.п} = A.$$

После этого дается определение: *боковой поверхностью цилиндра называется общий предел боковых поверхностей вписанных и описанных призм при бесконечном увеличении числа сторон их оснований.*

$S_{в.п} = p_n \cdot l$, а потому

$$S_{цил} = \lim_{n\to\infty} S_{в.п} = \lim_{n\to\infty} (p_n \cdot l) = \lim_{n\to\infty} p_n \cdot \lim_{n\to\infty} l.$$

Но $\lim_{n\to\infty} p_n = C = 2\pi R$, где R — радиус основания цилиндра и $\lim_{n\to\infty} l = l = H$, где H — высота цилиндра, а потому

$$S_{бок.\ ц} = 2\pi RH = \pi DH \text{ кв. ед.}$$

2. Объем прямого кругового и вообще любого цилиндра может быть вычислен по теореме Кавальери или по формуле Ньютона-Симпсона, а также как предел объемов вписанных и описанных призм при неограниченном увеличении числа сторон n их оснований. Соответствующие указания даны в стабильном учебнике.

3. В связи с рассмотрением цилиндра могут быть затронуты на кружковых занятиях вопросы, связанные с эллипсом, винтовой линией, геодезической линией, и другие.

1) Приводим элементарный вывод зависимости между координатами любой точки M эллипса и его полуосями. Пусть $A_1D_1B_1C_1$ — эллипс. Отрезок $A_1B_1 = 2a$ называется его большой осью; $A_1B_1 > 2R$, где R — радиус окружности основания цилиндра, а перпендикулярный к отрезку A_1B_1 отрезок $C_1D_1 = CD = 2b = 2R$ называется малой осью эллипса; проекция его $CD = C_1D_1$, так как $CD \parallel C_1D_1$ (рис. 287). Возьмем на контуре эллипса произвольную точку M, и пусть отрезок $OK = x$ и отрезок $MK = y$ служат координатами точки M, если считать оси A_1B_1 и C_1D_1 за оси координат и точку O за начало координат. Проводим затем через точку K прямую $LL_1 \parallel AB$. Из подобия треугольников A_1KL и A_3OA_1 и треугольников B_1OB_3 и B_1KL_1 находим:

$$\frac{LK}{A_3O} = \frac{A_1K}{A_1O} \quad \text{и} \quad \frac{KL_1}{OB_3} = \frac{B_1K}{B_1O}.$$

Перемножая полученные пропорции, имеем:

$$\frac{LK \cdot KL_1}{A_3O \cdot OB_3} = \frac{A_1K \cdot B_1K}{A_1O \cdot OB_1}.$$

Принимая во внимание, что $LK \cdot KL_1 = KM^2 = y^2$ и $A_3O \cdot OB_3 = R^2$, а также, что $A_1K = a + x$; $B_1K = a - x$ и $OA_1 = OB_1 = a$, находим:

$$\frac{y^2}{R^2} = \frac{(a+x)(a-x)}{a^2} \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2};$$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Полученное равенство устанавливает зависимость между координатами любой точки M эллипса и его полуосями. Это — уравнение эллипса, рассматриваемое в аналитической геометрии; решив его относительно y, можно по числовым значениям отдельных точек построить кривую — эллипс. Исследование уравнения показывает, что $x \leqq a$ и $y \leqq b$.

2) Для вычисления площади эллипса следует использовать теорему о зависимости между площадью фигуры и площадью ее проекции; **площадь фигуры равна площади ее проекции, деленной на косинус угла, образуемого плоскостью фигуры и плоскостью ее проекции.**

Теорема рассмотрена в стабильном учебнике.

Согласно этой теоремы:

$$S_{\text{элл}} = S_{\text{кр}} : \cos\alpha.$$

Но площадь круга $S_{\text{кр}} = \pi R^2 = \pi R \cdot R$ и

$$2R = 2a \cdot \cos\alpha \quad \text{или} \quad R = a \cdot \cos\alpha.$$

Следовательно,

$$S_{\text{кр}} = \pi a \cos\alpha \cdot R,$$

а потому

$$S_{\text{элл}} = \frac{\pi \cdot a \cdot R \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha} = \pi a R,$$

но так как $R = b$, то $S_{\text{элл}} = \pi ab$ (кв. ед.). Итак,

площадь эллипса равна произведению полуосей эллипса, умноженному на число π.

Нужно указать учащимся, что круг есть особый эллипс, который превращается в круг, если обе его оси равны, а именно, когда $b = a$.

3) Можно показать учащимся, как непрерывным движением вычерчивается эллипс. Перекидывают через две булавки F_1 и F, воткнутые в бумагу, замкнутую нить, длина которой больше двойного расстояния между F_1 и F (рис. 288); если затем натягивать нить острием карандаша и водить карандашом по бумаге, то вычерчивается эллипс; при этом, чем ближе расположены друг к другу точки F_1 и F — фокусы эллипса, тем меньше эллипс отличается от окружности; если фокусы F_1 и F совпадают, то эллипс обращается в окружность, радиус которой равен половине длины нити.

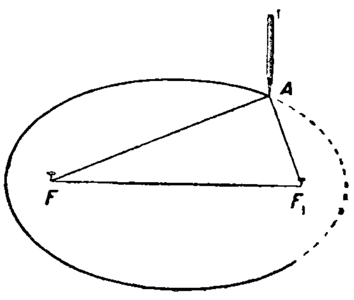


Рис. 288.

4) Если разобран вопрос о вычислении площади эллипса, можно предложить учащимся задачу на определение объема прямого эллиптического цилиндра; объем такого цилиндра равен произведению площади его основания на высоту, что легко установить на основании теоремы Кавальери, так как можно взять прямой круговой цилиндр, у которого сечение равновелико с эллиптическим.

5) Небезынтересным является для учащихся и вопрос о наименьшем расстоянии между двумя точками на кривой поверхности цилиндра. Так, если взяты две точки, лежащие на образующей цилиндра, то наименьшее расстояние — отрезок образующей, концами которого служат данные точки; если точки лежат на окружности сечения, параллельного основанию, то наименьшее расстояние между ними есть меньшая дуга окружности, имеющая концами своими две данные точки. Следует также

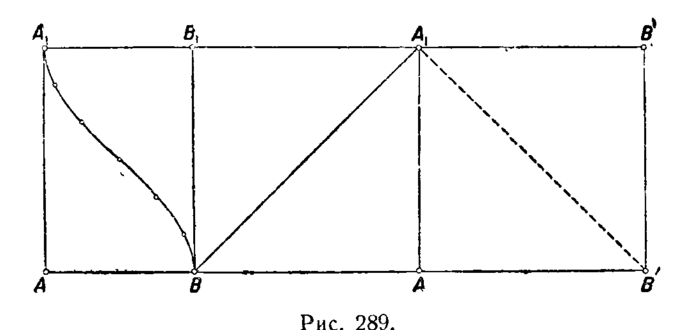


Рис. 289.

рассмотреть расстояние по поверхности цилиндра между точками A_1 и B, которые являются противолежащими вершинами осевого сечения цилиндра (рис. 289). Для этого вычерчивают развертку кривой поверхности цилиндра — прямоугольник $BB'B_1'B_1$, основание которого $BB' = 2\pi R$ и высота $BB_1 = H$, делят его основания прямой $AA_1 \parallel BB_1$ пополам, соединяют точки A_1, B' и B прямыми и тогда получают два искомых наименьших расстояния A_1B и A_1B', которые равны.

Если навернуть развертку на цилиндр, то прямая A_1B изобразит на поверхности цилиндра кривую линию, которая называется *винтовой линией*. Итак, наименьшее расстояние на поверхности цилиндра между точками A_1 и B есть часть винтовой линии. Следует показать учащимся, как практически получается на поверхности цилиндра винтовая линия. Для этого надо навернуть на поверхность цилиндра прямоугольный треугольник, сделанный хотя бы из бумаги, один из катетов которого a равен окружности основания цилиндра, и тогда гипотенуза его c дает на поверхности цилиндра часть винтовой линии (рис. 290)

Следует заметить, что другой катет b прямоугольного треугольника называется *высотой*, или *шагом*, винтовой линии, а угол β, лежащий против катета b, — *углом подъема* винтовой линии.

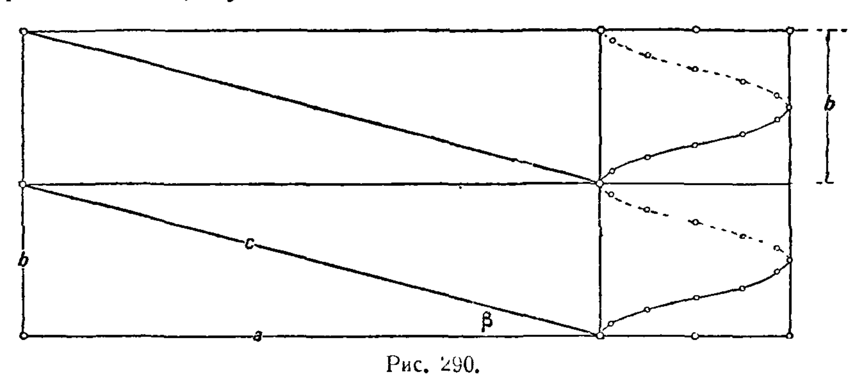


Рис. 290.

6) Весьма полезно при рассмотрении прямого кругового цилиндра как тела вращения сравнить между собою поверхности, а также объемы цилиндров, полученных вращением прямоугольника со сторонами a и b вокруг той или другой его стороны.

Пусть прямоугольник со сторонами a и b, где $a > b$, вращается или вокруг стороны a, тогда

$$S'_т = 2\pi ab + 2\pi b^2 = 2\pi b\,(a + b) \text{ кв. ед.}$$

и

$$V'_т = \pi b^2 a \text{ куб. ед.,} \qquad (1)$$

или вокруг b, и тогда

$$S''_т = 2\pi ba + 2\pi a^2 = 2\pi a\,(a + b) \text{ кв. ед.}$$

и

$$V''_т = \pi a^2 b \text{ куб. ед.} \qquad (2)$$

Если взять отношения полученных равенств (1) и (2), то

$$\frac{S'_т}{S''_т} = \frac{2\pi b\,(a + b)}{2\pi a\,(a + b)} = \frac{b}{a}$$

и

$$\frac{V'_т}{V''_т} = \frac{\pi b^2 a}{\pi a^2 b} = \frac{b}{a}.$$

Итак, при вращении прямоугольника вокруг большей его стороны a как полная поверхность тела вращения, так и объем его соответственно меньше полной поверхности тела, получаемого вращением того же прямо-

угольника вокруг меньшей его стороны b, а отношения соответствующих полных поверхностей и соответствующих объемов тел равны. Следует указать учащимся, что:

1) **поверхности подобных цилиндров относятся, как квадраты их радиусов или высот или диаметров;**

2) **объемы *подобных цилиндров относятся, как кубы их* радиусов или кубы высот или кубы диаметров.**

7) Для закрепления пройденного следует поставить ряд вопросов и задач, уделив внимание и комбинированным задачам на цилиндры, призмы и пирамиды.

Задачи.

1. Два прямых круговых цилиндра находятся своими основаниями на одной плоскости, имеют равные высоты и расстояние между их осями $d = 10$ *дм*. Как расположены относительно друг друга цилиндры, если их радиусы R_1 и R_2 соответственно равны *3 и 7 дм? 5 и 6 дм? 3 и 2 дм? 12 и 2 дм?*

В первом случае цилиндры внешне касаются по образующей; во втором случае цилиндры пересекаются, линия пересечения их боковых поверхностей — пара параллельных прямых; в третьем случае они лежат один вне другого, не пересекаясь и не касаясь; в четвертом случае один цилиндр лежит внутри другого, имеет место внутреннее касание цилиндров.

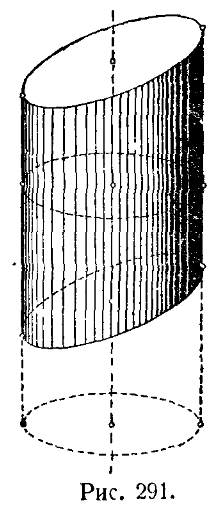


Рис. 291.

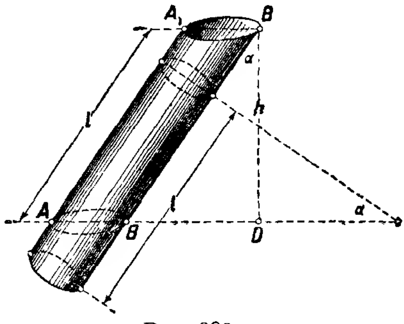


Рис. 292.

2. В каком цилиндре боковая поверхность равновелика сумме площадей его оснований? Согласно условию, $2\pi RH = 2\pi R^2$, откуда $H = R$.

3. Равносторонним называется цилиндр, у которого $H = 2R$ или осевое сечение которого — квадрат. Найти поверхность равностороннего цилиндра, если известно, что $R = 1$ *м*.

$$S_ц = 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2 = 6\pi \text{ м}^2.$$

4. Объем наклонного цилиндра, поперечное сечение которого — круг, равен площади поперечного сечения, умноженной на образующую цилиндра. Доказать.

Доказательство этой теоремы, которую можно предложить для проработки в кружке, аналогично доказательству теоремы об объеме

наклонной призмы. Необходимо использовать при рассмотрении теоремы соответствующую модель наклонного цилиндра (рис. 291). Параллельные основания наклонного цилиндра — равные эллипсы; если провести сечение, перпендикулярное к образующей цилиндра, и приложить отсеченную часть цилиндра к другой равными основаниями, то наклонный цилиндр превратится в прямой цилиндр, следовательно, наклонный и прямой цилиндры равносоставлены. Найдем объем цилиндра (рис. 292) $V_ц = Q_к \cdot l$ и $Q_к = Q_э \cos \alpha$, где $Q_к$ — площадь круга, а $Q_э$ — площадь эллипса, кроме того $h = l \cos \alpha$, а потому

$$V_ц = Q_э \cdot \cos \alpha \cdot l = Q_э \cdot h \text{ (куб. ед.)}.$$

Полезно дать задачу на вычисление объема коленчатой трубы, состоящей из двух цилиндров с одинаковым диаметром сечения, соединенных друг с другом под прямым углом (рис. 293а, б). Такая коленчатая труба получается, если прямой круговой цилиндр пересечь плоскостью под углом в 45° к образующей или к оси и затем приложить одну часть к другой, как показано на рисунке 293б. Объем находится через умножение площади поперечного сечения на высоту, составленную из двух отрезков $BD + AF$ или $AC + BE$, что видно из рисунков 293а и б. Если надо найти площадь сечения AB, то надлежит площадь перпендикулярного сечения разделить на $\cos 45°$.

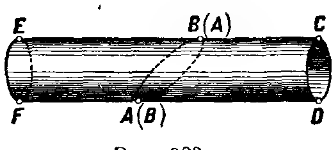


Рис. 293а.

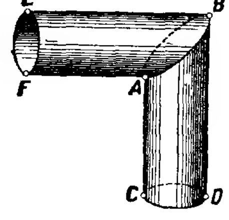


Рис. 293б.

5. Вписать в данный прямой круговой цилиндр, радиус основания которого R, правильную шестиугольную призму и найти отношение боковых поверхностей и объемов этих тел.

Цилиндр и призма имеют общую ось, это — их высота, а потому

$$\frac{S_{бок.\,ц}}{S_{бок.\,пр}} = \frac{2\pi R}{6R} = \frac{\pi}{3},$$

$$\frac{V_ц}{V_{пр}} = \frac{\pi R^2}{\frac{6R^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

6. Сколько килограммов весит 1000 *м* прокатной проволоки из меди толщиной (диаметра) в 1,3 *мм*? Удельный вес меди равен 9.

Под толщиной проволоки разумеют диаметр поперечного сечения проволоки.

При решении данного вопроса и ему подобных надо прежде всего указать учащимся, что данные в условии числа должны быть выражены в единицах одного и того же наименования. Следует еще раз напомнить учащимся, что называется удельным весом.

Удельным весом вещества называется:

вес 1 $см^3$ его, выраженный в граммах,
или „ 1 $дм^3$ „ „ в килограммах,
или „ 1 $м^3$ „ „ в тоннах.

Учащиеся должны также знать, что вес P тела равен удельному его весу, умноженному на число кубических единиц его объема, соответственно выраженных:

$$P = \delta \cdot V,$$

где δ — удельный вес и V — объем тела.

Порядок вычисления следующий:

$$D = 1{,}3 \text{ мм} = 0{,}013 \text{ дм}$$
$$H = 1000 \text{ м} = 10\,000 \text{ дм}$$
$$\delta = 9{,}0$$
$$\overline{P = \delta V}$$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot H; \quad P = \delta \cdot \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot H = 9{,}0 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}0065^2 \cdot 10\,000 \approx 11{,}9 \text{ кг} \approx 12 \text{ кг}.$$

Для составления задач можно использовать данные из следующей таблицы.

Вес 1000 *м* проволоки (в *кг*)

Диаметр сечения проволоки (в *мм*)	Вес (в *кг*)	Вес (в *кг*)
	Сталь (уд. вес 7,85)	Прокатная медь (уд. вес 9)
0,20	0,25	0,28
0,50	1,54	1,76
0,70	2,88	3,44
1,00	6,16	7,03
1,10	7,46	8,50
1,30	10,4	11,9

При увеличении диаметра перпендикулярного сечения проволоки в 2, 3,..., n раз вес проволоки увеличивается в 4, 9,..., n^2 раз, если длина остается неизменной.

На основании данных приведенной таблицы учащимся может быть предложен, например, следующий вопрос:

Какой длины надо взять медную проволоку толщиной 1 *мм*, чтобы она весила 700 *г*?

На вопрос находим ответ в таблице: медная проволока длиной 1000 *м* весит приблизительно 7 *кг*. Вес же данной проволоки равен 700 *г*, т. е. в 10 раз меньше, следовательно, и длина проволоки должна быть в 10 раз меньше; она приблизительно равна 100 *м*.

Разумеется, учащиеся могут не пользоваться таблицей и решать каждый вопрос, не прибегая к таблице. Однако, после того как ряд аналогичных примеров решен учащимися без помощи таблицы, следует ознакомить их с таблицей и научить пользоваться ею. Более полная таблица приведена в справочнике Hütte.

7. Вычислить в килограммах вес a метров трубы, внутренний диаметр которой d *мм*, при толщине стенок в m *мм* и удельном весе δ.

Вес $P = \delta \cdot V$; V — объем трубы и наружный диаметр трубы $d_1 = d + 2m$.

Имеем:

$$V = \frac{1}{4}\pi (d_1^2 - d^2) \cdot 1000\,a = \frac{1}{4}\pi (d_1 - d) \cdot (d_1 + d) \cdot 1000a \text{ мм}^3.$$

$$d_1 - d = 2m \quad \text{и} \quad d_1 = d + 2m,$$

а потому

$$V = \frac{1}{4}\pi \cdot 2m\,(2d + 2m) \cdot 1000a = \pi m\,(d + m) \cdot 1000\,a \text{ мм}^3 =$$
$$= 1000\,\pi a m\,(d + m) \text{ мм}^3.$$

Вес трубы надо выразить в килограммах, а потому объем ее должен быть выражен в кубических дециметрах, следовательно,

$$V = 1000\tau \cdot a \cdot m \cdot (d + m) \cdot 10^{-6} = 10^{-3}\pi a m\,(d + m)\ дм^3,$$

откуда

$$P = 10^{-3}\pi a \delta m\,(d + m)\ кг.$$

Пример: для медной трубы, у которой $a = 1$ *м*, $d = 8$ *мм*, $m = 2$ *мм* и $\delta = 9$, имеем

$$P = 10^{-3} \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}0 \cdot 9{,}0 \cdot 2{,}0 \cdot 10 \approx 0{,}56\ кг.$$

Для составления подобного рода задач можно воспользоваться следующей таблицей.

Медные и бронзовые трубы ($\delta = 9{,}0$).

Вес 1 погонного метра (в *кг*).

Внутренний диаметр (в *мм*)	Толщина стенок (в *мм*)							
	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5
3	0,11	0,19	0,28	0,39	0,51	0,64	—	—
4	0,14	0,23	0,34	0,46	0,59	0,74	—	—
5	0,17	0,28	0,40	0,53	0,68	0,84	1,02	—
6	0,20	0,32	0,45	0,60	0,76	0,94	1,13	1,55
8	0,25	0,40	0,56	0,74	0,93	1,14	1,36	1,84
10	0,31	0,49	0,68	0,88	1,10	1,34	1,58	2,12
12	0,37	0,57	0,79	1,02	1,27	1,53	1,81	2,40
13	0,40	0,61	0,85	1,07	1,36	1,63	1,92	2,54
15	0,45	0,70	0,96	1,24	1,53	1,83	2,15	2,83
16	0,48	0,74	1,02	1,31	1,61	1,93	2,26	2,97
18	0,54	0,83	1,13	1,45	1,78	2,13	2,49	3,25
20	0,59	0,91	1,24	1,59	1,95	2,33	2,71	3,53

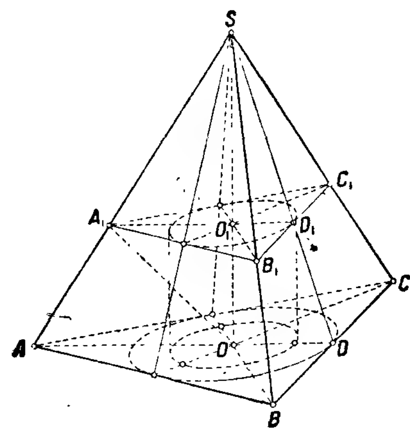


Рис. 294а.

8. В правильную треугольную пирамиду, все ребра которой равны a, поместить равносторонний прямой круговой цилиндр так, чтобы основание его лежало в плоскости основания пирамиды, другое же основание касалось боковых граней пирамиды, и вычислить поверхность и объем цилиндра.

Верхнее основание цилиндра должно касаться всех трех боковых граней пирамиды; оно коснется апофем пирамиды и, следовательно, вписано в сечение пирамиды, параллельное основанию (рис. 294а). „Вписанный" цилиндр — равносторонний, а потому высота его h равна диаметру D его основания, $h = D$; обозначим D через $2r$, т. е. $D = 2r$.

Вычислим сторону треугольного сечения; она равна $2r\sqrt{3}$, ибо сто-

рона b_3 описанного правильного треугольника, выраженная через радиус вписанной окружности, равна $2r\sqrt{3}$; $b_3 = 2r\sqrt{3}$.

Из подобия соответствующих треугольников запишем:

$$\frac{a}{2r\sqrt{3}} = \frac{H}{H-2r}, \qquad (1)$$

где H — высота пирамиды.

Высота пирамиды

$$H = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6a^2}{9}} = \frac{a}{3}\sqrt{6}.$$

Взяв производную пропорцию от (1), имеем:

$$\frac{a - 2r\sqrt{3}}{a} = \frac{2r}{H}$$

и, заменив H выражением $\frac{a\sqrt{6}}{3}$, находим:

$$\frac{a - 2r\sqrt{3}}{a} = \frac{6r}{a\sqrt{6}}$$

или

$$a - 2r\sqrt{3} = r\sqrt{6},$$

откуда

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3} + \sqrt{6}} = \frac{a(2\sqrt{3} - \sqrt{6})}{6}$$

и

$$2r = \frac{a(2\sqrt{3} - \sqrt{6})}{3}.$$

Зная высоту и диаметр основания цилиндра, вычисляем его поверхность и объем.

Чтобы построить цилиндр, помещенный указанным способом в правильную треугольную пирамиду, рассмотрим сечение пирамиды, проходящее через одно из ее ребер и высоту (рис. 294б).

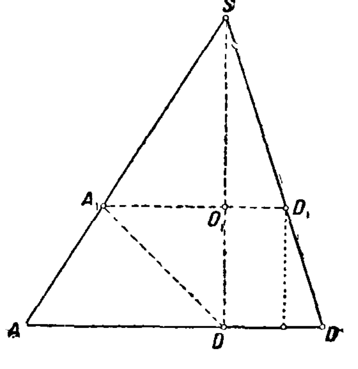


Рис. 294б.

Если в треугольное сечение пирамиды вписана окружность, то $O_1D_1 = r$ — радиус круга. Но $O_1D_1 = \frac{1}{3}A_1D_1$, где A_1D_1 — высота треугольника $A_1B_1C_1$, значит, r содержится в A_1D_1 три раза, а потому $A_1O_1 = 2r = O_1O$, и, следовательно, треугольник OO_1A_1 — прямоугольный и равнобедренный и $\angle O_1OA_1 = 45°$.

Итак, построив пирамиду, все ребра которой равны a, так, чтобы сечение ее, проходящее через ребро SA и высоту SO, лежало в вертикальной плоскости чертежа, надо построить прямоугольный треугольник AOS по гипотенузе $SA = a$ и катету $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; затем проводим биссектрису OA_1 прямого угла SOA и определяем точку A_1 на ребре SA_1, через которую проходит сечение пирамиды. Построив затем сечение и вписанный в него круг, проектируем последний на плоскость основания и строим искомое изображение цилиндра.

Задачи и вопросы.

1. Две касательные плоскости к боковой поверхности прямого кругового цилиндра или параллельны, или пересекаются по прямой, параллельной оси цилиндра. Доказать.

2. Если отрезки, соединяющие центр одного основания цилиндра с любыми точками на контуре другого основания равны, то цилиндр—прямой и круговой. Доказать.

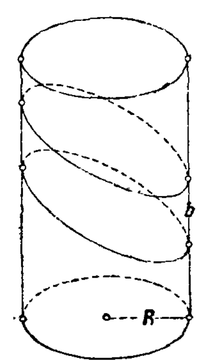


Рис. 295.

3. Конгруентны ли два прямых круговых цилиндра, если a) диаметры и высоты их равны, b) осевые сечения конгруентны?

4. Прямой круговой цилиндр пересечен двумя параллельными плоскостями так, что образовавшийся между ними наклонный цилиндр имеет образующую, равную b *см*. Найти боковую поверхность и объем наклонного цилиндра, если известно, что радиус основания данного цилиндра равен R *см* (рис. 295).

5. Насколько следует увеличить высоту данного цилиндра, чтобы боковая поверхность удлиненного цилиндра оказалась равной полной поверхности данного?

6. Две плоскости пересекаются по оси прямого кругового цилиндра и образуют двугранный угол в 30°. Найти полную поверхность вырезанной части, если известно, что радиус основания цилиндра R и высота его H.

7. Боковая поверхность цилиндра и его объем численно равны. Найти диаметр цилиндра.

8. Боковые поверхности двух цилиндров равны. Найти отношение их объемов.

9. Ребра прямоугольного параллелепипеда относятся как $a:b:c$. Принимая последовательно каждую из неравных граней параллелепипеда за основание, описать вокруг параллелепипеда цилиндры; плоскости основания цилиндров и каждого из параллелепипедов совпадают и боковые ребра каждого из параллелепипедов лежат на поверхности соответствующих цилиндров. Найти отношение боковых поверхностей и объемов цилиндров.

10. Построить развертку куба, который можно поместить в цилиндр так, что две его вершины лежат на оси цилиндра, а остальные — на поверхности цилиндра. Радиус цилиндра равен R.

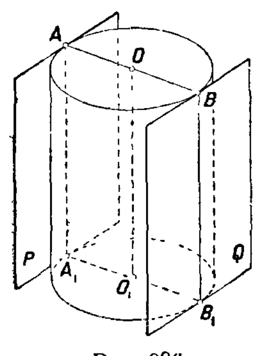


Рис. 296а.

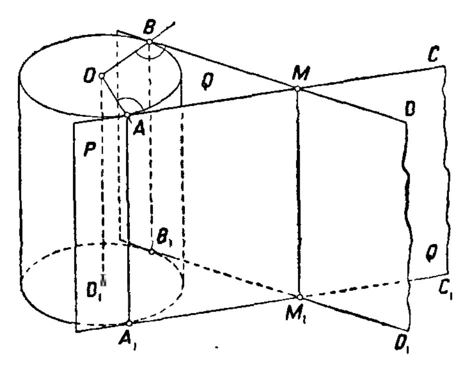


Рис. 296б.

11. Через диаметр основания прямого кругового цилиндра проведена плоскость под некоторым углом к плоскости основания цилиндра. Она отсекает от цилиндра тело, называемое **цилиндрическим копытом.** Радиус цилиндра — R и высота копыта — h. Найти объем копыта.

Указания к задачам и вопросам.

1. Плоскость, касающаяся поверхности цилиндра, соприкасается с цилиндром по образующей, которая параллельна оси цилиндра. Осевое сечение, проходящее через образующую касания, перпендикулярно к плоскости касания; следовательно, плоскость, касающаяся поверхности цилиндра по противолежащей стороне осевого сечения, также перпендикулярна к нему, и обе плоскости касания параллельны (рис. 296а).

Если взяты образующие AA_1 и BB_1, не лежащие на осевом сечении (рис. 296б), то касательные плоскости P и Q, проходящие по ним, должны пересечься, так как касательные прямые AC и BD, получаемые в сечении, пересекаются, будучи перпендикулярными к пересекающимся радиусам OA и OB основания цилиндра.

Линия пересечения MM_1 касательных плоскостей P и Q параллельна оси цилиндра, так как MM_1 параллельна двум прямым AA_1 и BB_1 — образующим, лежащим на касательных плоскостях P и Q.

2. Если прямые, соединяющие центр одного основания цилиндра с любыми точками на контуре другого основания, равны, то равны и их проекции, а это указывает на то, что существует на плоскости основания точка, удаленная от любых точек контура на одинаковое расстояние, а значит это есть центр контура и контур есть окружность, а так как основания цилиндра равны, то цилиндр круговой. Перпендикуляр проходит через центр одной окружности, а потому он, будучи перпендикулярным и к другой плоскости, также проходит через центр другого основания, и цилиндр прямой.

3. a) Цилиндры конгруентны: если совместить окружности оснований двух прямых круговых цилиндров, то высота одного цилиндра пойдет по высоте другого, так как через данную точку в плоскости можно провести только один перпендикуляр, а вследствие их равенства совпадут и центры других оснований и сами плоскости, ибо через точку вне плоскости можно провести только одну параллельную ей плоскость.

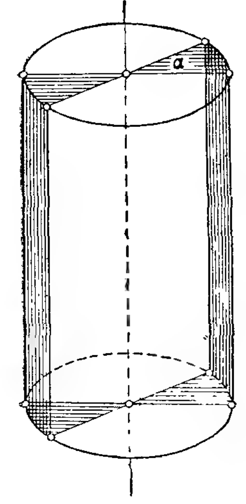


Рис. 297.

b) Цилиндры могут не быть конгруентны, так как осевые сечения прямоугольники — могут не быть одинаково расположенными, а именно, высота в одном цилиндре может служить диаметром основания другого и обратно.

4. Перпендикулярное сечение наклонного цилиндра — круг основания данного цилиндра; $S_{бок} = 2\pi Rb$ *см*^{2} и $V = \pi R^2 b$ *см*^{3}.

5. Обозначим радиус данного цилиндра через R и его высоту через H; полная его поверхность $S_{полн} = 2\pi R(R + H)$ кв. ед. Пусть высота H цилиндра удлинена на x; тогда боковая поверхность удлиненного цилиндра равна $2\pi R(H + x)$. Согласно условию задачи, $2\pi R(R + H) = 2\pi R(H + x)$, следовательно, $x = R$. Данная задача обычно решается устно; из структуры формулы $S_n = 2\pi R(R + H)$ непосредственно следует, что полная поверхность равна боковой поверхности при условии, если удлинить высоту цилиндра на длину радиуса.

6. Полная поверхность вырезанной части (рис. 297) состоит из $\frac{1}{6}$ боковой поверхности цилиндра, равной $\frac{2\pi RH}{6}$; площади четырех секторов, угол каждого из которых $\alpha = 30^\circ$, сумма же их площадей равна $4 \cdot \frac{\pi R^2 \cdot 30}{360} = \frac{\pi R^2}{3}$, и площадей двух диагональных сечений, сумма площадей которых равна $2 \cdot 2RH = 4RH$, следовательно, полная поверхность заданного тела равна $\frac{\pi RH}{3} + \frac{\pi R^2}{3} + 4RH = \frac{\pi R}{3}(H + R) + 4RH$ кв. ед.

7. $S_{бок} = 2\pi RH$ [кв. ед.] и $V = \pi R^2 H$ [куб. ед.] по условию, $2\pi RH = \pi R^2 H$ или $2RH = R^2 H$ или $R^2 H - 2RH = 0$ и $RH(R - 2) = 0$; отсюда и $R_1 = 0$ и $R_2 = 2$ и $H = 0$; значит, при $R = 2$ численно равны $S_{бок}$ и V. Понятно, что при $R = 0$ и $S_{бок}$ и V равны нулю; точно так же и при $H = 0$ численно равны $S_{бок}$ и V, при этом, конечно, $S_{бок}$ и V равны нулю.

8. 1) По условию задачи $S'_{бок} = 2\pi R_1 H_1$ и $S''_б = 2\pi R_2 H_2$, отсюда

$$R_1 H_1 = R_2 H_2 \text{ или } \frac{R_1}{R_2} = \frac{H_2}{H_1}.$$

2) $V_1 = \pi R_1^2 H_1$ и $V_2 = \pi R_2^2 H_2$,

а потому

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^2 H_1}{R_2^2 H_2} = \frac{H_2^2 \cdot H_1}{H_1^2 \cdot H_2} = \frac{H_2}{H_1} = \frac{R_1}{R_2},$$

т. е. объемы пропорциональны радиусам и обратно пропорциональны высотам.

9. Если основание параллелепипеда — прямоугольник со сторонами a и b, то c — высота цилиндра, а диаметр цилиндра, в который вписан данный параллелепипед, равен $\sqrt{a^2+b^2}$, боковая поверхность с высотой c равна $S_c=\pi\sqrt{a^2+b^2}\cdot c$.

Если в основании параллелепипеда лежит прямоугольник со сторонами b и c или c и a, то высоты цилиндра соответственно равны a и b, и, следовательно, пользуясь круговой подстановкой, находим: $S_a=\pi\sqrt{b^2+c^2}\cdot a$ и $S_b=\pi\sqrt{c^2+a^2}\cdot b$, а потому

$$S_a:S_b:S_c=a\sqrt{b^2+c^2}:b\sqrt{c^2+a^2}:c\sqrt{a^2+b^2}.$$

Находим объемы соответствующих цилиндров:

$$V_c=\frac{1}{4}\pi(a^2+b^2)\cdot c;\quad V_a=\frac{1}{4}\pi(b^2+c^2)\,a \quad \text{и} \quad V_b=\frac{1}{4}\pi(c^2+a^2)\,b,$$

откуда

$$V_a:V_b:V_c=(b^2+c^2)\,a:(c^2+a^2)\,b:(a^2+b^2)\,c.$$

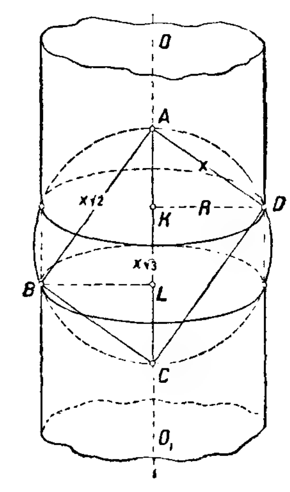


Рис. 298.

Рис. 299.

10. Если провести диагональное сечение куба, ребро которого обозначим через x, то получим прямоугольник со сторонами x и $x\sqrt{2}$; его диагональ — диагональ куба — равна $x\sqrt{3}$. Допустим, что куб помещен в цилиндр так, что диагональ куба лежит на оси цилиндра (рис. 298); в таком случае две вершины прямоугольника лежат на поверхности цилиндра, и плоскость диагонального сечения куба есть в то же время и осевое сечение цилиндра. При вращении прямоугольника вокруг его диагонали остальные две его вершины образуют окружности параллельных сечений цилиндра. Если прямоугольник $ABCD$ — диагональное сечение куба, то отрезок $DK=BL$ — радиус цилиндра, в который „вписан" куб. Из треугольника ADC находим $x\sqrt{3}\cdot R = x\cdot x\sqrt{2}$, откуда $x=\frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{R\sqrt{6}}{2}$; второй корень $x=0$ отбрасываем, так как при $x=0$ куб обращается в точку.

Итак, если радиус R цилиндра дан, то ребро куба $x=\sqrt{\frac{6R^2}{4}}=\sqrt{\frac{3R}{2}\cdot\frac{R}{2}}$, и, таким образом, x — среднее пропорциональное между отрезками $1\frac{1}{2}R$ и $\frac{1}{2}R$. Построив квадрат со стороной x, строят одну из тех 11 разверток куба, о которых речь была выше.

11. Принимая A и B (рис. 299) за вершины тела, лежащие в полоскостях, параллельных плоскости треугольника OCD (среднего сечения), и обозначая расстояние O_1B плоскости произвольного сечения $O_1C_1D_1$ от вершины B через x, имеем из треугольника OO_1C_1:

$$O_1C_1^2=OC_1^2-OO_1^2 \quad \text{или} \quad O_1C_1^2=R^2-(x-R)^2$$

$$O_1C_1=\sqrt{x(2R-x)}.$$

Отношение $\frac{D_1C_1}{O_1C_1}$ — величина постоянная; обозначим ее через m (это тангенс

угла, образованного плоскостью сечения ADB с плоскостью основания цилиндра). Следовательно,

$$\frac{D_1C_1}{O_1C_1}=m \text{ и } D_1C_1=m.O_1C_1=m\sqrt{x(2R-x)},$$

а потому

$$\text{пл. } O_1C_1D_1=\frac{1}{2}\cdot O_1C_1\cdot D_1C_1=\frac{1}{2}mx(2R-x),$$

т. е. пл. $O_1C_1D_1$ есть функция второй степени x, расстояния его от основания B или от вершины тела.

Таким образом, формула Ньютона-Симпсона может быть применена.

Решение задачи дано в стабильном учебнике (стр. 93 гл. XI, § 8).

§ 59. Конус.

1. Приступая к изучению конуса, надлежит дать учащимся понятие об образовании конической поверхности и конуса.

Коническая поверхность получается непрерывным перемещением прямой AA_1 — образующей, проходящей через неподвижную точку S и одновременно скользящей по кривой MN — направляющей конической поверхности.

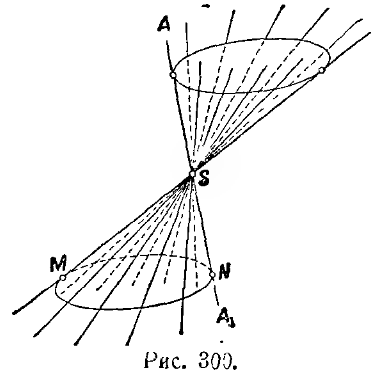


Рис. 300.

Неподвижная точка S называется вершиной конической поверхности; AA_1 есть прямая, а не луч, а потому при непрерывном перемещении прямой AA_1 образуются две полости конической поверхности, что видно из рисунка 300.

Конус — тело, ограниченное конической поверхностью и пересекающей ее плоскостью. Необходимо заметить, что в элементарном курсе средней школы обычно ограничиваются рассмотрением лишь прямого кругового конуса, где направляющая — окружность, и точка S — вершина конуса лежит на перпендикуляре, проведенном через центр круга к плоскости последнего, или тела, получаемого при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. Основание такого конуса — круг, а высота конуса — ось вращения; она проходит через центр основания конуса.

Сечения конуса.

2. Следует рассмотреть с учащимися различные сечения конуса. Так, всякое сечение конуса, перпендикулярное к оси, а следовательно, параллельное его основанию, — тоже круг; зависимость между площадью основания конуса и площадью параллельного основанию сечения та же, что в пирамиде: **площадь основания конуса и площадь сечения, параллельного его основанию, относятся, как квадраты их расстояний от вершины конуса**

Сечение прямого кругового конуса, проходящее через вершину конуса и диаметр его основания, — равнобедренный треугольник, боковыми сторонами которого служат две образующие конуса; такое сечение называется *осевым сечением* конуса. Если провести в конусе сечение через

его вершину и какую-либо хорду основания, то получится также равнобедренный треугольник, в котором угол, составленный образующими конуса, меньше угла, составленного образующими осевого сечения конуса. Учащиеся должны знать, что угол, составленный образующими осевого сечения, — наибольший из всех возможных углов, составленных двумя образующими конуса. Если осевое сечение конуса — правильный треугольник, то конус называется р а в н о с т о р о н н и м.

Желательно обратить внимание учащихся на те плоскости сечений, которые образуют с осью конуса углы острые или тупые и не проходят через вершину конуса; они дают при пересечении с поверхностью конуса к р и в ы е в т о р о г о п о р я д к а — э л л и п с, п а р а б о л у и г и п е р б о л у; к кривым второго порядка относится и окружность. Если провести две прямые AB и CD, пересекающиеся в точке S (рис. 301),

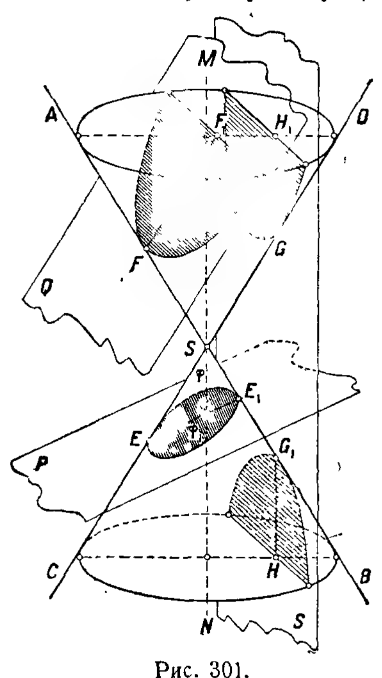


Рис. 301.

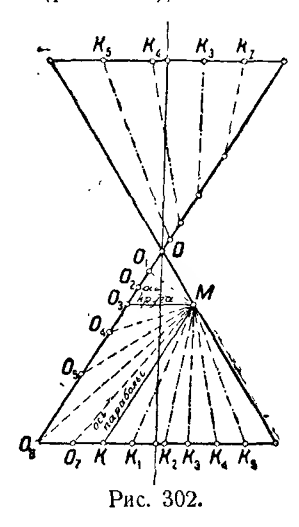


Рис. 302.

затем биссектрису MN противоположных углов ASD и BSC и вращать всю фигуру вокруг биссектрисы MN, то получится коническая поверхность с двумя полостями. Если после этого пересечь обе полости параллельными плоскостями AD и BC, перпендикулярными к оси, то в сечении получатся круги; все же тело будет двойным конусом, или б и к о н у с о м.

Если пересечь коническую поверхность плоскостью P и эта плоскость P пересечет ось MN конуса под углом φ_1, причем $\varphi<\varphi_1$, где φ—угол между осью и образующей, то в сечении получится замкнутая кривая линия — э л л и п с. При $\varphi_1=90^\circ$ эллипс переходит в круг, ибо в этом случае $P \perp MN$ и $P \parallel BC$.

Если затем пересечь коническую поверхность плоскостью Q, параллельной образующей DC, так, что $\varphi=\varphi_1$, то в сечении получится незамкнутая кривая — *парабола*.

Если, наконец, пересечь коническую поверхность плоскостью S, параллельной оси конуса, так, что $\varphi>\varphi_1$, то в сечении получатся две вет-

ви одной кривой — гиперболы, из которых одна расположена на поверхности одной полости биконуса, другая — на поверхности другой; φ_1 может быть равным и нулю.

Кривые эти следует показать на каркасной модели или на деревянной модели с соответствующими сечениями.

Переход одной из этих кривых в другую следует показать учащимся на модели и при помощи чертежа, данного на рисунке 302. Пусть MO_1 — ось конического сечения; вращая секущую плоскость, проходящую через точку M, из положения MO_1 в положение MO_2..., видим, что эллипс обращается в круг, когда MO_3 перпендикулярна оси конуса; далее, когда секущая плоскость занимает положение MO_4, MO_5.., имеем снова эллипс; при $MK \parallel OO_6$ имеем параболу; затем, при MK_1, MK_2...—гиперболы, состоящие из двух ветвей, и, наконец, при MO — прямую — образующую конуса.

Поверхность конуса.

3. Знакомство учащихся с разверткой конуса может быть использовано для вычисления поверхности прямого кругового конуса.

Кривая оверхность конуса, или, что то же самое, его боковая поверхность, равна площади его развертки, имеющей форму сектора; радиус последнего равен образующей, а длина его дуги равна длине окружности основания конуса. Принимая последнее во внимание, имеем:

$$S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot l = \pi R l \text{ кв. ед.}$$

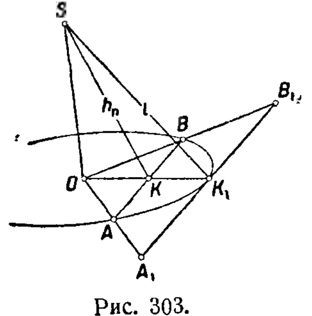


Рис. 303.

Однако боковую поверхность конуса можно вычислить как предел, к которому стремится боковая поверхность правильной n-угольной вписанной в конус или описанной пирамиды при неограниченном удвоении числа ее граней.

Если взять боковую поверхность правильной описанной пирамиды, то, беря соответственно предел ее, будем иметь:

$$S_{бок} = \lim S_{б.\ пир} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} P_n \cdot l\right) = \frac{1}{2} l \cdot \lim_{n \to \infty} P_n = \frac{1}{2} l \cdot 2\pi R = \pi R l \text{кв.ед.}$$

Можно показать, что предел боковой поверхности правильной вписанной пирамиды совпадает с пределом правильной описанной пирамиды.

В самом деле, $S_{бок.\ оп.\ пир} = \frac{1}{2} P_n \cdot l$, а $S_{бок.\ вп.\ пир} = \frac{1}{2} p_n h_n$, где h_n — апофема вписанной пирамиды; но,

$$\frac{1}{2} P_n \cdot l - \frac{1}{2} p_n \cdot h_n = \frac{1}{2} [P_n \cdot l - P_n h_n + P_n h_n - p_n \cdot h_n] =$$
$$= \frac{1}{2} [P_n (l - h_n) + h_n (P_n - p_n)].$$

Из треугольника SKK_1 (рис. 303) имеем

$$l - h_n < KK_1 = OK_1 - OK = R - a_n,$$

но $R - a_n$, как известно, при $n \to \infty$, переменное бесконечно-малое, точно так же $P_n - p_n$ — переменное бесконечно-малое. Итак, $h_n (P_n - p_n)$

и $P_n(l - h_n)$ — бесконечно-малые, а потому:

$$\lim_{n \to \infty} S_{\text{бок. вп. пир}} = \lim_{n \to \infty} S_{\text{бок. оп. пир.}}$$

Следует обратить внимание учащихся на то, что апофема описанной вокруг конуса пирамиды одновременно является и образующей конуса, что не имеет места у вписанного конуса. В последнем случае апофема пирамиды и образующая конуса — различные отрезки.

Выводится также и формула полной поверхности конуса:

$$S_{\text{п. к}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(R + l) \text{ кв. ед.}$$

Если рассматривать основание конуса как проекцию его боковой поверхности на плоскость основания, то имеем следующую формулу для боковой поверхности конуса:

$$S_{\text{бок}} = \pi R^2 : \cos \alpha \text{ кв. ед.},$$

где α — угол наклона образующей конуса у плоскости основания.

Когда конус равносторонний, $\angle \alpha = 60°$, тогда

$$S_{\text{бок}} = \pi R^2 : \cos 60° = 2\pi R^2,$$

т. е. **боковая поверхность равностороннего конуса в два раза больше площади его основания;** полная же поверхность равностороннего конуса в три раза больше площади его основания и, следовательно, в полтора раза больше боковой его поверхности.

Сравнивая поверхности двух конусов, имеем, что:

1) боковые поверхности двух конусов с равными основаниями относятся, как их образующие,

2) боковые поверхности двух конусов с равными образующими относятся, как радиусы их оснований.

Следует дать учащимся понятие о подобных конусах. *Два конуса называются подобными, если они получились при вращении подобных прямоугольных треугольников вокруг соответствующих сторон.*

В качестве самостоятельной работы на доказательство теорем можно предложить учащимся доказать, что **поверхности двух подобных конусов относятся, как квадраты радиусов их оснований или как квадраты их образующих, или как квадраты их высот, и, вообще, как квадраты сходственных сторон.**

Наибольший угол между образующими конуса и угол развертки конуса.

4. Длина дуги развертки боковой поверхности конуса, дуги сектора, равна $2\pi R$ — длине окружности основания конуса радиуса R; с другой стороны, если обозначить угол сектора развертки через β и принять во внимание, что радиус l этого сектора — образующая конуса, то длина дуги сектора равна $\frac{2\pi l \cdot \beta}{360°}$. Итак, $2\pi R = \frac{2\pi l\beta}{360°}$ или $360° \cdot R = l\beta$, откуда

$$\beta = 360° \cdot \frac{R}{l}.$$

Если обозначить наибольший угол, составленный образующими конуса, через α, то из соответствующего прямоугольного треугольника получаем $\frac{R}{l} = \sin\frac{\alpha}{2}$, а потому $\beta = 360° \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$. Такова зависимость между углом β — углом развертки и углом α — наибольшим углом, составленным образующими конуса.

Если конус равносторонний, то $\alpha = 60°$ и $\frac{\alpha}{2} = 30°$, а потому

$$\beta = 360° \cdot \sin 30° = 180°,$$

т. е. **развертка боковой поверхности равностороннего конуса — полукруг.**

Полученный результат показывает, что в полукруге, свернутом в коническую поверхность, наибольший угол, составленный образующими, равен 60°.

Небезынтересно проследить, как изменяется угол развертки с изменением наибольшего угла, составленного образующими конуса. Так, с увеличением угла, составленного образующими, при одном и том же R основания конуса высота конуса уменьшается; при $\alpha = 90°$ имеем:

$$\beta = 360° \cdot \sin 45° = 180° \cdot \sqrt{2} \approx 252°;$$

если $\alpha = 120°$, то

$$\beta = 360° \cdot \sin 60° = 180° \cdot \sqrt{3} \approx 307°.$$

Если $\alpha = 180°$, то конус, фигура трех измерений, обратится в фигуру двух измерений — круг, и тогда

$$\beta = 360° \cdot \sin 90° = 360°,$$

и, таким образом, развертка боковой поверхности равна самой боковой поверхности; но круг равен самому себе: развертка круга — круг. Подобный анализ показывает, что круг можно рассматривать, как тело, т. е. как предел конуса, когда $R \to l \neq 0$.

5. Для проверки усвоения учащимися полученного вывода могут быть предложены следующие задачи:

Задача 1. По данному радиусу R основания конуса и высоте его h найти угол развертки боковой поверхности.

Решение. $\beta = 360° \cdot \frac{R}{l}$, так как $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{l}$, но $l = \sqrt{R^2 + h^2}$, а потому

$$\beta = 360° \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}}.$$

В частном случае, если $R = 3$ и $h = 4$, имеем: $l = \sqrt{R^2 + h^2} = 5$ и $\beta = 360° \cdot \frac{3}{5} = 216°$.

Задача 2. Боковая поверхность конуса в четыре раза больше площади основания. Найти угол развертки боковой поверхности.

$$\beta = 360° \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Если наибольший угол, составленный образующими конуса, — α, то угол наклона образующей к плоскости основания равен $90° - \frac{\alpha}{2}$ и $\cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{пл. основ.}}{\text{бок. поверхн.}} = \frac{1}{4}$ или $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$, а потому $\beta = 360° \cdot \frac{1}{4} = 90°$.

Разбор полученного решения, да и ход самого решения должны убедить учащихся, что в том случае, когда боковая поверхность конуса в 5,6,..., n раз больше площади основания, то соответственно $\beta=\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$; $\beta=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ$... и $\beta=\frac{360^\circ}{n}$.

С другой стороны, если $\angle\beta=\frac{360^\circ}{4}, \frac{360^\circ}{5}, \frac{360^\circ}{6}, \ldots, \frac{360^\circ}{n}$, то боковая поверхность конуса в 4, 5, 6... раз больше площади основания.

Такое исследование решения задачи способствует математическому развитию учащихся.

Поверхность усеченного конуса.

6. Прямой круговой усеченный конус может быть определен как часть прямого кругового конуса, заключенная между двумя параллельными его сечениями, перпендикулярными к оси конуса; наряду с этим следует указать, что усеченный конус можно рассматривать как тело, полученное вращением прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны ее, служащей высотой трапеции. В дальнейшем прямой круговой усеченный конус будем называть усеченным конусом без соответствующего добавления.

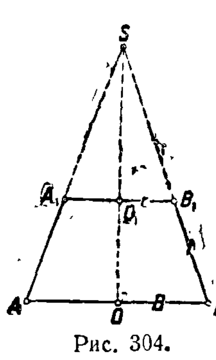


Рис. 304.

Боковую поверхность усеченного конуса проще всего рассматривать, как разность поверхности конуса и поверхности отсеченного соответствующего конуса. Учащимся рекомендуется вычерчивать усеченный конус, как и усеченную пирамиду, предварительно вычерчивая конус, а затем проводя сечение, параллельное основанию.

Пусть от данного конуса SAB отсечен конус SA_1B_1 и требуется найти боковую поверхность усеченного конуса ABB_1A_1, если известно, что радиусы его оснований $OB=R$, $O_1B_1=r$ и образующая $BB_1=l$ (рис. 304); на рисунке дано осевое сечение конуса.

Обозначив SB_1 через x, имеем:

$$S_{бок}=\pi R(l+x)-\pi rx=\pi(Rl+Rx-rx)=\pi[Rl+x(R-r)].$$

Из подобия треугольников OSB и O_1SB_1 находим:

$$\frac{R}{r}=\frac{l+x}{x},$$

или, пользуясь производной пропорцией,

$$\frac{R-r}{r}=\frac{l}{x},$$

откуда $x=\frac{rl}{R-r}$, следовательно,

$$S_{бок}=\pi(Rl+rl)=\pi(R+r)l \text{ кв. ед.}$$

Если написать полученную формулу в ином виде, а именно,

$$S_{бок}=2\pi\frac{R+r}{2}\cdot l,$$

где $\frac{R+r}{2}$ — радиус среднего сечения $r_{ср}$, то получим еще одно выражение для боковой поверхности усеченного конуса.

Боковая поверхность усеченного конуса равна произведению длины окружности среднего сечения на образующую конуса:

$$S_{бок}=2\pi r_{ср} l \text{ кв. ед.}$$

Развертка боковой поверхности усеченного конуса — „кольцевой" сектор; строится эта развертка так же, как и развертка боковой поверхности конуса, и представляет собой разность двух круговых секторов.

Имеется и другое выражение для площади боковой поверхности усеченного конуса, в которое входят радиусы обоих оснований и угол α наклона образующей к плоскости основания. Так, ортогонально проектируя меньшее основание на плоскость большего, мы получим проекцию боковой поверхности усеченного конуса в виде кольца, площадь которого $\pi(R^2-r^2)$ или $\pi(R+r)(R-r)$, а потому

$$S_{бок}=\pi(R+r)(R-r):\cos\alpha \text{ кв. ед.}$$

Приводим формулу, по которой боковая поверхность усеченного конуса вычислялась Архимедом:

Боковая поверхность усеченного конуса равна площади такого круга, радиус которого является средней пропорциональной между образующей и суммой радиусов оснований:

$$S_{бок. кон}=\pi[\sqrt{l(R+r)}]^2 \text{ кв. ед.}$$

Данная формула вполне совпадает с выведенной выше формулой.

Задачи и вопросы.

1. Можно ли построить прямой круговой конус по данным: 1) R и H 2) R и l, 3) R и α, 4) h и l, 5) h и α?

2. Можно ли вписать конус в четырехугольную пирамиду, стороны основания которой относятся, как 1:3:6:4?

3. Можно ли описать конус около четырехугольной пирамиды, углы основания которой, взятые в последовательном порядке, относятся, как 2:5:7:4?

4. Оси двух прямых круговых конусов лежат на одной прямой и имеют различные вершины. Образующие или их продолжения общего осевого сечения обоих конусов или параллельны, или пересекаются, образуя геометрическое место точек — окружность; эта окружность лежит в плоскости, параллельной основаниям обоих конусов. Доказать.

5. Прямой круговой цилиндр и прямой круговой конус, оси которых лежат на одной прямой, пересекаются по кругу, параллельному их основаниям. Доказать.

Примечание. Может быть случай, когда приходится продолжать образующие конусов.

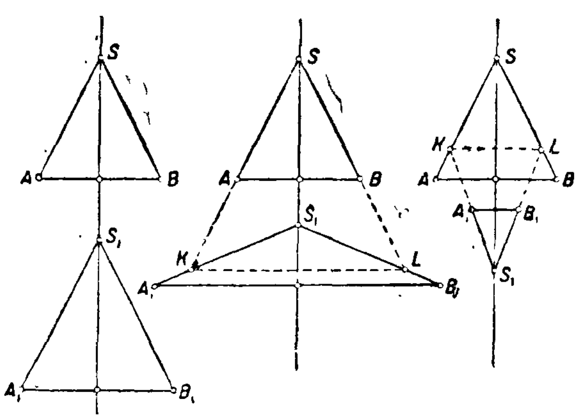


Рис. 305

Указания к задачам и вопросам.

1. Прямой круговой конус можно построить, если можно построить его осевое сечение — равнобедренный треугольник.

2. Четырехугольник основания — описанный, так как $1+6=3+4$; следовательно, в него можно вписать окружность, а в данную пирамиду — конус. Отрезки, проведенные из вершины пирамиды в соответствующие точки прикосновения окружности, — образующие конуса.

3. Четырехугольник основания — вписанный, а потому через все его вершины можно провести окружность, а следовательно, можно и описать около такой пирамиды конус; ребра пирамиды служат образующими конуса. Следует иметь в виду, что если основание пирамиды — вписанный многоугольник, то около такой пирамиды можно описать конус.

Понятно, что всякая правильная пирамида может быть вписанной в конус.

4. На рис. 305 взято общее осевое сечение обоих конусов; прямые SA и S_1A_1, SB и S_1B_1 либо параллельны, либо пересекаются; в последнем случае, рассматривая треугольники SS_1L и SS_1K, заключаем, что они равны (УСУ), а потому $S_1L=S_1K$, также $SS_1 \perp KL$, что вытекает из равенства прямоугольных треугольников и, следовательно, $KL \parallel A_1B_1$ и является диаметром круга, параллельного основаниям.

5. Доказательство аналогично доказательству, приведенному в задаче 4.

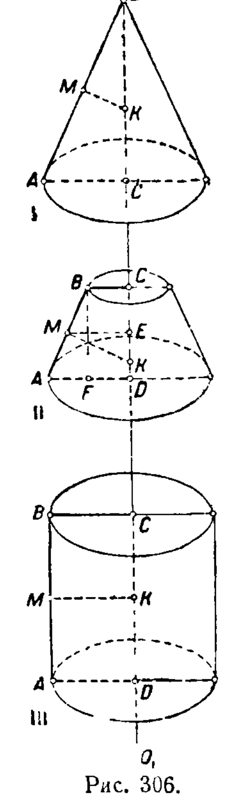
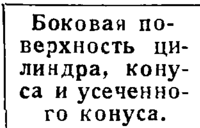


Рис. 306.


Боковая поверхность цилиндра, конуса и усеченного конуса.

7. После вывода формулы для вычисления боковых поверхностей цилиндра, конуса и усеченного конуса следует дать учащимся обобщенную формулу для вычисления поверхности любого из указанных трех тел. Это тем более необходимо сделать, что с ее помощью можно вычислить поверхность шара.

Вывод обобщенной формулы.

Известно, что

1) $S_{\text{бок. кон}}=\pi\cdot AC\cdot AB$, где $AC=R$ и $AB=l$.

Проведя медиатрису MK образующей AB до пересечения ее с осью OO_1 конуса (рис. 306, *I*), получим треугольник BMK, подобный треугольнику ACB, вращением которого вокруг катета BC образован конус.

Из подобия треугольников BMK и ACB следует:

$$\frac{MK}{BM}=\frac{AC}{BC},$$

или, так как $BM=\frac{1}{2}AB$, имеем:

$$\frac{MK}{{}^1/_2\,AB}=\frac{AC}{BC},$$

откуда $\frac{1}{2}AB\cdot AC=BC\cdot MK$, а потому

$$S_{\text{бок. кон}}=2\pi\cdot BC\cdot MK=2\pi\cdot H\cdot x,$$

где H — проекция образующей конуса на ось вращения: $\text{пр.}_{OO_1}\cdot l=H$ и x — отрезок медиатрисы от середины M образующей конуса до пересечения в точке K с осью конуса.

2) $S_{\text{бок. ус. кон}}=\pi(AD+BC)\cdot AB$, где $AD=R$, $BC=r$ и $AB=l$.

Проведя медиатрису MK образующей усеченного конуса до пересечения ее с осью OO_1 усеченного конуса, среднюю линию ME боковых

сторон AB и CD трапеции и высоту $BF = CD$ трапеции (рис. 306, *II*), получим $\triangle MEK \backsim \triangle BFA$, а потому

$$\frac{ME}{MK} = \frac{BF}{AB} \text{ или, так как } ME = \frac{1}{2}(AD+BC),$$

$$\frac{\frac{1}{2}(AD+BC)}{MK} = \frac{CD}{AB}, \text{ откуда } \frac{1}{2}(AD+BC)\cdot AB = CD\cdot MK.$$

Следовательно,

$$S_{\text{бок. ус. кон}} = 2\pi\cdot CD\cdot MK = 2\pi\cdot H\cdot x,$$

где $H = \text{пр.}_{OO_1} l$ и x — отрезок медиатрисы от середины M образующей AB до пересечения в точке K с осью.

3) $S_{\text{бок. цил}} = 2\pi\cdot AD\cdot DC$, где $AD = R$ и $DC = l$; но

$$AD = MK \text{ и } DC = H \text{ (рис. 306, } III).$$

Если и в данном случае обозначим MK через x, то

$$S_{\text{бок. цил}} = 2\pi\cdot H\cdot x.$$

Итак, боковые поверхности всех трех тел выражаются одной и той же формулой $S_{AB} = 2\pi\cdot\text{пр.}_{OO_1} l\cdot x$.

Итак, **поверхность, образуемая вращением отрезка AB вокруг оси OO_1, при условии, что отрезок AB не перпендикулярен к оси вращения OO_1 и лежит в одной плоскости с осью вращения OO_1 и по одну сторону от нее, равна произведению длины окружности радиуса x на проекцию вращаемого отрезка на ось, где x — расстояние середины M отрезка до оси по медиатрисе.**

Пример на применение этой теоремы.

Правильный шестиугольник со стороной a вращается вокруг одной из наибольших своих диагоналей. Найти поверхность тела вращения.

Рис. 307.

Вращая правильный шестиугольник вокруг оси DA (рис. 307), имеем, согласно рассмотренной выше теореме, следующее:

отрезок CD дает поверхность $S_{CD} = 2\pi x\cdot DK$,
отрезок BC дает поверхность $S_{BC} = 2\pi x\cdot KL$,
отрезок BA дает поверхность $S_{BA} = 2\pi x\cdot LA$,

так как $OM_1 = OM_2 = OM_3 = x$, как апофемы правильного многоугольника.

Суммируя полученные равенства, имеем:

$$S_{ABCD} = 2\pi x(DK + KL + LA) = 2\pi x\cdot DA.$$

Но $DA = 2a$ и $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, а потому

$$S_{ABCD} = 2\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot 2a = 2\pi a^2\sqrt{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

Объем конуса.

8. Формулу для вычисления объема прямого кругового конуса можно вывести одним из трех указанных ниже приемов. На практике наиболее распространен следующий прием: объем конуса принимается за предел объема правильной вписанной в конус или описанной n-угольной пирамиды при неограниченном удвоении числа ее граней.

Так, если объем пирамиды

$$V_{пир}=\frac{1}{3}Q_n\cdot H,$$

где Q_n — площадь основания и H — высота пирамиды, то при неограниченном удвоении числа n граней пирамиды V и Q_n, а следовательно, и $\frac{1}{3}Q_nH$ — переменные величины; переменные V и $\frac{1}{3}Q_nH$ равны при всех своих изменениях, а потому равны и их пределы, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} V_{пир}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}Q_n\cdot H\right),$$

откуда

$$V_{кон}=\frac{1}{3}K\cdot H, \text{ где } K \text{ — площадь круга,}$$

или

$$V_{кон}=\frac{1}{3}\pi R^2H \text{ (куб. ед.).}$$

Понятно, что такой прием не строг с научной точки зрения; более строгим будет этот прием, если будет показано, что объем конуса есть общий предел правильных вписанных и описанных одноименных пирамид при неограниченном удвоении числа их граней.

Обозначив объемы вписанной и описанной пирамид соответственно через $V_{в.п}$ и $V_{о.п}$, площади их оснований через $Q_{в.п}$ и $Q_{о.п}$ и общую их высоту через H, имеем:

$$V_{о.п}=\frac{1}{3}Q_{о.п}\cdot H \quad \text{и} \quad V_{в.п}=\frac{1}{3}Q_{о.п}\cdot H$$

и

$$V_{о.п}-V_{в.п}=\frac{1}{3}Q_{о.п}\cdot H-\frac{1}{3}Q_{в.п}\cdot H=\frac{1}{3}H(Q_{о.п}-Q_{в.п}),$$

следовательно, $V_{о.п}-V_{в.п}$ при $n\to\infty$ есть бесконечно-малая величина, ибо при этом условии $Q_{о.п}-Q_{в.п}$ есть бесконечно-малая и произведение постоянной $\frac{1}{3}H$ на бесконечно-малую есть величина бесконечно-малая. Итак,

$$V_{о.п}-V_{в.п}=\text{беск. мал. при } n\to\infty.$$

С другой стороны, V конуса заключается между $V_{о.п}$ и $V_{в.п}$.

$$V_{в.п}<V_k<V_{о.п},$$

а потому на основании теоремы: если постоянная величина (V_k) заключается между двумя переменными ($V_{о.п}$ и $V_{в.п}$), разность между которыми бесконечно-мала, то постоянная есть предел той и другой переменной:

$$\lim_{n\to\infty} V_{в.п}=V_k=\lim_{n\to\infty} V_{о.п}.$$

Далее следует приведенное выше заключение:

$$V_{\text{кон}} = \lim \frac{1}{3} Q_n H = \lim \frac{1}{3} H \cdot \lim Q_n = \frac{1}{3} KH = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Итак, **объем конуса равен одной трети площади его основания, умноженной на высоту конуса.**

Второй прием основан на теореме Кавальери; вывод соответствующей формулы дан в стабильном учебнике. Следует подчеркнуть, что на основании теоремы Кавальери объем любого конуса выражается так же, как и объем прямого кругового конуса.

Третий прием состоит в применении формулы Ньютона-Симпсона, ибо площадь любого сечения конуса, параллельного основанию конуса, есть функция второго измерения его расстояния от основания конуса на основании теоремы: **площадь сечения относится к площади основания, как квадраты их расстояний от вершин.** В самом деле, обозначив высоту конуса через H, а расстояние плоскости сечения от плоскости основания через x, имеем на основании указанной теоремы:

$$\frac{Q_{\text{осн}}}{Q_{\text{сеч}}} = \frac{H^2}{(H-x)^2} \text{ или } \frac{\pi R^2}{Q_{\text{сеч}}} = \frac{H^2}{(H-x)^2},$$

а потому

$$Q_{\text{сеч}} = \frac{\pi R^2}{H^2}(H-x)^2,$$

т. е. $Q_{\text{сеч}}$ — квадратная функция x расстояния плоскости сечения от плоскости основания.

Для конуса формула Ньютона-Симпсона $V = \frac{1}{6} H (Q + q + 4Q_{\text{ср}})$ дает

$$V = \frac{1}{6} H \left(\pi R^2 + O + 4\pi \frac{R^2}{H}\right)$$

или

$$V = \frac{1}{6} H \cdot 2\pi R^2 = \frac{1}{3} \pi R^2 H \text{ (куб. ед.)}.$$

Само собою разумеется, что достаточно ограничиться показом учащимся какого-либо одного вывода. Другой вывод может быть дан при повторении курса. Что же касается формулы Ньютона-Симпсона, то ее удобнее всего дать при заключении курса, так как она позволяет вычислять объемы большинства тел элементарного курса, удовлетворяющих определенным условиям, в том числе и объем шара и шарового сегмента. Формула Ньютона-Симпсона помогает легко восстановить в памяти любую из формул для вычисления объемов тел.

После решения нескольких примеров на применение формулы объема конуса следует дать учащимся доказать, что

1) объемы двух конусов с равными высотами относятся, как квадраты их радиусов, а объемы конусов с равными основаниями относятся, как их высоты;

2) объемы подобных конусов относятся как кубы их высот или как кубы их радиусов, или как кубы их образующих, или как кубы любых сходственных отрезков.

Подобными называются прямые круговые конусы, если их осевые сечения подобны.

Формулу объема усеченного конуса наиболее целесообразно вывести, рассматривая усеченный конус, как разность двух конусов.

Учащиеся должны самостоятельно доказать, что объемы двух подобных усеченных конусов (а это такие, у которых осевые сечения — подобные трапеции) относятся как кубы их радиусов или кубы их высот, или кубы их образующих, или вообще кубы двух любых сходственных отрезков.

Задача 1. Два равных конуса имеют общую высоту и плоскости их оснований параллельны, как показано на рис. 308. Доказать, что объем общей части обоих конусов равен $\frac{1}{4}$ объема каждого из них.

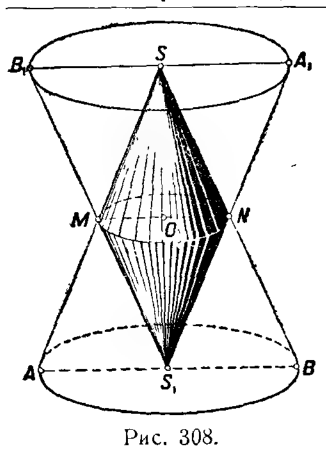


Рис. 308.

Из рисунка видно, что общая часть обоих конусов — биконус, радиус которого равен $\frac{R}{2}$ и ось равна H. Отсюда следует, что $V_т = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{4} \cdot H = \frac{1}{12} \pi R^2 H$, что составляет $\frac{1}{4}$ объема V конуса.

Задача 2. Показать, что формулы объема конуса и цилиндра являются частным случаем формулы объема усеченного конуса.

Если в формуле объема

$$V_{ус.\,кон} = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2)$$

положить $r = 0$, то получится формула объема конуса; если же принять, что $r = R$, то получится формула объема цилиндра.

§ 60. Тела, получаемые при вращении прямолинейных фигур.

В связи с выводом обобщенной формулы для вычисления боковой поверхности цилиндра, конуса и усеченного конуса учащиеся уже знакомы с некоторыми телами вращения, получаемыми вращением отрезка вокруг оси. Для полноты картины следует еще рассмотреть фигуры, получаемые вращением отрезка, расположенного перпендикулярно к оси вращения.

Здесь могут быть два случая: или вращаемый отрезок имеет с осью общую точку, или он не имеет общей точки с осью вращения.

Если один конец такого отрезка лежит на оси, то отрезок при своем вращении вокруг оси опишет круг; если же перпендикулярный к оси отрезок не имеет с ней общих точек, то при своем вращении вокруг оси он опишет кольцо.

Случай, когда оба конца отрезка лежат на оси, не представляет интереса, так как отрезок, вращаясь вокруг самого себя, не меняет своего положения и, следовательно, не образует поверхности.

Итак, отрезок, вращаясь вокруг оси, находящейся в одной с ним плоскости, образует либо кривую поверхность цилиндра или конуса, или усеченного конуса, либо плоскую поверхность круга или кольца; других поверхностей отрезок образовать не может. Указанные пять возможных случаев положения вращаемого отрезка рассмотрены в стабильном учебнике.

Следует рассмотреть с учащимися тело, получаемое при вращении вокруг оси какой-либо плоской фигуры, находящейся в одной плоскости

с осью вращения; целесообразно выбрать такую фигуру, стороны которой при вращении вокруг оси образовали бы пять разобранных выше поверхностей. Пусть дан шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 309), вращающийся вокруг оси xx_1, проходящей через вершину A шестиугольника параллельно его стороне DC и перпендикулярной к сторонам AB и EF. Вершины фигуры, не лежащие на оси, называются *свободными*, в отличие от вершин, лежащих на оси и называемых *несвободными*; свободными в данном примере являются вершины B, C, D, E и F, вершина же A не свободна — она лежит на оси xx_1. Чтобы изобразить на чертеже тело вращения, следует провести из всех свободных вершин перпендикуляры на ось и продолжить их на такое же расстояние по другую сторону оси; другими словами — следует построить фигуру, симметричную данной относительно оси вращения. При вращении шестиугольника $ABCDEF$ вокруг оси xx_1 сторона AB дает круг, так как $AB \perp xx_1$, стороны BC и DE — кривые поверхности усеченных конусов, сторона DC — кривую поверхность цилиндра, сторона EF — кольцо и, наконец, сторона FA — кривую поверхность конуса; поверхность тела вращения

$$S_m = S_{AB} + S_{BC} + S_{CD} + S_{DE} + S_{EF} + S_{FA}.$$

Итак, **поверхность тела вращения есть арифметическая сумма поверхностей, образуемых вращением отдельных звеньев замкнутого контура прямолинейной фигуры.** Следует подчеркнуть, что: 1) фигуры берутся плоские, 2) ось вращения лежит в одной плоскости с вращаемой фигурой и 3) вращаемая фигура расположена по одну сторону от оси вращения.

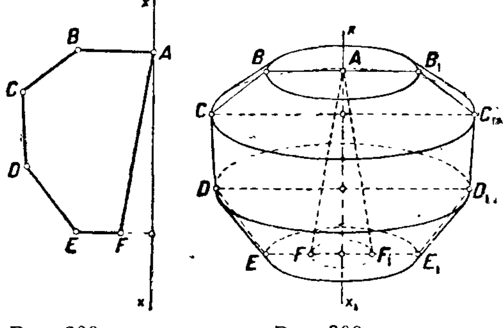


Рис. 309. Рис. 309а.

При вычерчивании тела, получаемого вращением вокруг оси xx_1, данного шестиугольника $ABCDEF$, можно было изобразить на рисунке и круги, диаметры которых BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 и FF_1, и тогда отдельные части тела вращения выделялись бы более четко (рис. 309а); однако, можно этого и не делать во избежание загромождения рисунка большим числом вспомогательных линий.

Можно ограничиться осевым сечением тела вращения.

При вычислении о б ъ е м а данного тела вращения необходимо обратить внимание учащихся на то, что отрезки EF и BA, образуя при вращении плоские фигуры, фигуры двух измерений, не дают объема, и что конус, поверхность которого образована вращением отрезка AF, не принадлежит телу вращения, и последнее, таким образом, состоит из цилиндра DC и приложенных к нему равными своими основаниями двух усеченных конусов, из которых вынут конус FA.

Таким образом, имеем:

$$V_т = V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DE} + V_{EF} - V_{FA},$$

но

$$V_{AB} = 0 \quad \text{и} \quad V_{EF} = 0,$$

а потому

$$V_T = V_{BC} + V_{CD} + V_{DE} - V_{FA}.$$

Итак, **объем тела вращения есть алгебраическая сумма объемов составляющих его частей.**

Теорема Гюльдена.

1. Теорема Гюльдена об объеме и поверхности тел вращения впервые была дана в конце III в. греческим математиком Паппом в его „Математических коллекциях". В VII книге своих „Математических коллекций" Папп говорит: „Отношения между собою фигур, происшедших от вращения линии или поверхности, находятся между собой как произведения образующих фигур и окружностей, описанных из центра тяжести".

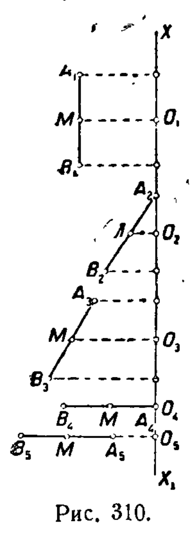


Рис. 310.

Гюльден (1577—1643), швейцарский математик, в своем сочинении „О центре тяжести" следующим образом формулирует свою теорему: „Величина объема или поверхности вращения равна производящей площади или длине линии, умноженной на путь, пройденный ее центром тяжести". Не исключена возможность, что Гюльден взял свое предложение у Паппа. Интересно отметить, что ни Папп, ни Гюльден не дали полного доказательства своих предложений; строгое доказательство теоремы Гюльдена дается в курсе интегрального исчисления.

Теорема Гюльдена позволяет находить весьма просто и изящно поверхности и объемы многих тел, получаемых при вращении плоских фигур вокруг оси, не пересекающей вращаемой фигуры и лежащей с ней в одной плоскости, если известно положение центра тяжести фигуры и его расстояние от оси вращения; поэтому познакомить учащихся с применением теоремы Гюльдена небесполезно. Теорема Гюльдена обычно дается учащимся в средней школе без доказательства. Покажем все же, как можно пояснить учащимся сущность теоремы Гюльдена.

2. Если вращать отрезок вокруг оси xx_1, то, в зависимости от положения отрезка относительно оси, получается боковая поверхность цилиндра, конуса, усеченного конуса, круга или кольца.

Известно, что центр тяжести отрезка лежит в его середине. Пусть центр тяжести отрезка AB находится в точке M. Запишем, чему равны боковые поверхности тел (рис. 310), получаемых при вращении отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5 вокруг оси xx_1, лежащей в одной плоскости с данными отрезками:

$$S_{б.\,ц} = 2\pi RH = 2\pi \cdot MO_1 \cdot A_1B_1,$$

$$S_{б.\,к} = \pi Rl = 2\pi \cdot MO_2 \cdot A_2B_2,$$

так как $R = 2MO_2$, где MO_2 — средняя линия,

$$S_{б.\,ус.\,к} = \pi(R + r)l = 2\pi \cdot MO_3 \cdot A_3B_3,$$

так как $R + r = 2MO_3$ (средняя линия),

$$S_{круга} = \pi R^2 = 2\pi \cdot MO_4 \cdot A_4B_4,$$

так как $R = 2MO_4 = A_4B_4$,

$$S_{\text{кольца}} = \pi (R + r)(R - r) = 2\pi \cdot MO_5 \cdot A_5B_5,$$

так как $R + r = B_5O_5 + A_5O_5 = 2MO_5$ и $R - r = A_5B_5$.

Разбор полученных равенств показывает, что **поверхность, образуемая вращением вокруг оси отрезка, лежащего по одну сторону от оси и в одной с ней плоскости, равна произведению длины отрезка на длину окружности, радиус которой есть расстояние центра тяжести отрезка до оси вращения.**

3. Допустим, что вокруг оси OO_1 вращается однородная весомая ломаная линия $ABCDE$, все звенья которой лежат в одной плоскости с осью и по одну сторону от оси (рис. 311). Пусть

$AB = l_1$, $BC = l_2$, $CD = l_3$, $DE = l_4$;

M_1, M_2, M_3, M_4 — центры тяжести звеньев AB, BC, CD, DE;

a_1, a_2, a_3, a_4 — расстояния центров тяжести M_1, M_2, M_3, M_4 до оси OO_1;

μ — масса отрезка материальной линии в единицу длины.

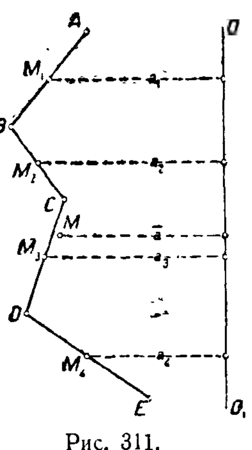


Рис. 311.

Из механики известно, что, если дана система материальных точек и m_1, m_2, m_3, ... — массы этих точек, то сумма произведений массы точек на соответствующие расстояния точек до оси — момент системы относительно оси — равна произведению общей массы M всей системы на расстояние центра тяжести всей системы до той же оси — момент центра тяжести всей системы относительно той же оси.

Тогда, на основании вывода п. 2, имеем:

$$S_{ABCDE} = 2\pi a_1 AB + 2\pi a_2 BC + 2\pi a_3 CD + \ldots =$$
$$= 2\pi (a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \ldots). \quad (1)$$

Массы отдельных звеньев материальной ломаной будут

$$\mu l_1, \quad \mu l_2, \quad \mu l_3, \ldots$$

Сумма произведений масс этих звеньев на соответствующие расстояния их от оси $\mu (a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \ldots)$ равна общей массе M сист мы, умноженной на расстояние $\bar{a}$ ее центра тяжести относительно той же оси, следовательно,

$$M\bar{a} = \mu (a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \ldots).$$

Но масса M всей системы равна

$$M = (l_1 + l_2 + l_3 + \ldots) \cdot \mu,$$

а потому

$$(l_1 + l_2 + l_3 + \ldots) \mu \bar{a} = \mu (a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \ldots),$$

откуда

$$(l_1 + l_2 + l_3 + \ldots) \bar{a} = a_1 l_1 + a_2 l_2 + \ldots \quad (2)$$

Подставляя в формулу (1) вместо $(a_1l_1 + a_2l_2 + a_3l_3 + \ldots)$ соответствующее значение из равенства (2), получим следующую формулу для вычисления поверхности тела вращения, образуемой вращением вокруг оси плоской линии, лежащей в одной плоскости с осью и не пересекающей ось:

$$S_{ABCDE} = 2\pi\bar{a}(l_1 + l_2 + l_3 + \ldots) = 2\pi\bar{a}L, \quad \text{где} \quad L = l_1 + l_2 + l_3 + \ldots$$

Полученная формула справедлива и для случая, когда ломаная линия — замкнутая; она верна и для плоской кривой линии, которую можно рассматривать как предельный случай ломаной линии, вершины которой лежат на кривой и число звеньев которой бесконечно возрастает.

Формула выражает так называемую первую часть теоремы Гюльдена.

Поверхность, получаемая при вращении вокруг оси какой-нибудь плоской линии, лежащей в одной плоскости с осью и не пересекающей ось, равна произведению длины вращаемой линии (L) на длину окружности ($2\pi\bar{a}$), радиус которой ($\bar{a}$) равен расстоянию центра тяжести вращаемой линии до оси вращения.

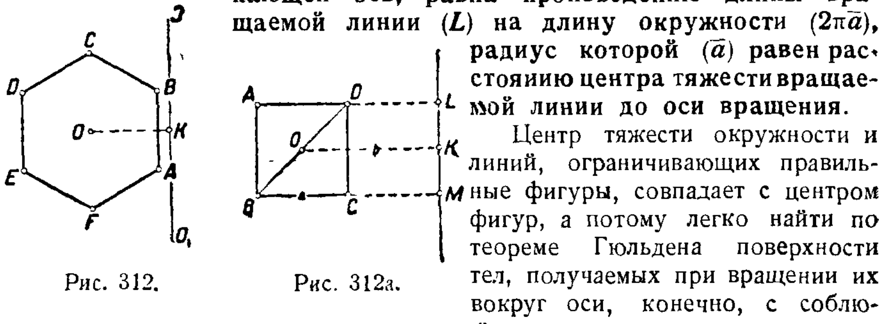


Рис. 312. Рис. 312а.

Центр тяжести окружности и линий, ограничивающих правильные фигуры, совпадает с центром фигур, а потому легко найти по теореме Гюльдена поверхности тел, получаемых при вращении их вокруг оси, конечно, с соблюдением указанных в теореме условий.

Задача. Правильный шестиугольник со стороной a вращается вокруг оси, параллельной стороне шестиугольника, на расстоянии a от центра тяжести, причем ось лежит в плоскости шестиугольника (рис. 312). Вычислить поверхность тела вращения.

По теореме Гюльдена

$$S_{\text{т. вр}} = P \cdot 2\pi x = 6a \cdot 2\pi a = 12\pi a^2 \text{ кв. ед.}$$

Если непрерывно удваивать число сторон вписанного шестиугольника, то в пределе, когда число сторон будет бесконечно-велико, получится окружность; теорема Гюльдена остается верной и для окружности; получаемое же при вращении круга вокруг оси (лежащей в плоскости круга) тело называется тором. Поверхность тора — „кольца" — равна $2\pi R \cdot x$, где x — расстояние центра окружности до оси вращения.

4. Вывод второй части теоремы Гюльдена следует предварить решением следующей задачи:

Параллельно стороне квадрата и его плоскости проведена прямая, отстоящая от ближайших вершин квадрата на расстояние b и не пересекающая квадрат; сторона квадрата равна a. Найти объем тела, получаемого при вращении квадрата вокруг этой оси (рис. 312а).

Решение данной задачи приведено в стабильном учебнике; приводим краткую запись решения задачи:

$$V_т = \pi(a + b)^2 a - \pi b^2 a = \pi a(a^2 + 2ab) = \pi a^2(a + 2b).$$

Если $OK = x$, то $x = \frac{a}{2} + b$ и $2x = a + 2b$,

а $$V_т = \pi (a + 2b) a^2 = 2\pi x a^2 \text{ (куб. ед.)}.$$

Итак, обьем тела вращения равен площади квадрата, умноженной на длину окружности, радиус которой равен расстоянию центра тяжести квадрата до оси вращения.

5. Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную произвольным контуром; разобьем ее площадь взаимно перпендикулярными прямыми на сеть квадратов, которые могут быть взяты каких угодно малых размеров. Пусть площадь разобьется на n целых квадратов и m различных частей квадратов, прилежащих к контуру фигуры. Если неограниченно уменьшать стороны квадратов и тем самым, следовательно, неограниченно увеличивать число n квадратов, то квадраты заполнят площадь всей фигуры, и тогда площадь ее S можно рассматривать как предел суммы площадей всех заполняющих ее малых квадратов. Итак,

$$S = \lim_{n \to \infty} (s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n),$$

где $s_1, s_2, s_3 \ldots$ — площади отдельных квадратов.

Пусть данная фигура — однородная пластинка, имеющая одинаковую толщину, и пусть квадратная единица имеет массу μ; в таком случае массы соответствующих площадок будут: $\mu s_1, \mu s_2, \mu s_3, \ldots, \mu s_n$.

Если расстояния центров тяжести площадок до оси вращения обозначить через $a_1, a_2, a_3, \ldots$, сумму всей массы через $M = \mu S$, расстояние центра тяжести всей массы S до оси через $\bar{a}$, то, на основании полученного в п. 4 вывода, имеем:

$$V = 2\pi a_1 s_1 + 2\pi a_2 s_2 + 2\pi a_3 s_3 + \ldots = 2\pi (a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + \ldots).$$

Но

$$\mu (a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + \ldots) = M\bar{a} = \mu S\bar{a},$$

или

$$a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + \ldots = S \cdot \bar{a},$$

а потому:

$$V = 2\pi\bar{a} \cdot S \text{ (куб. ед.)}.$$

Эта формула выражает собой второю часть теоремы Гюльдена: **объем, получаемый при вращении вокруг оси какой-нибудь плоской фигуры, лежащей в одной плоскости с осью и по одну сторону от оси, равен произведению площади фигуры на длину окружности, радиус которой равен расстоянию центра тяжести площади вращаемой фигуры до оси вращения.**

Вычислим по теореме Гюльдена объем тела, получаемого вращением правильного шестиугольника со стороной a вокруг оси, параллельной стороне шестиугольника и отстоящей от центра тяжести фигуры на расстояние a.

$$V_т = 2\pi a \cdot S = 2\pi a \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3\pi a^3 \sqrt{3} \text{ (куб. ед.)}.$$

Для тора имеем:

$$V_{тора} = \pi R^2 \cdot 2\pi x = 2\pi^2 R^2 x \text{ (куб. ед.)},$$

где x — расстояние центра круга от оси вращения.

6. Следует обратить внимание на то, что поверхность тела, получаемого при вращении вокруг оси плоской фигуры, лежащей в одной плоскости с осью и по одну сторону от оси, или его объем зависят исключительно от длины контура или от площади вращаемой плоской фигуры и от расстояния центра тяжести линии или площади до оси вращения. В силу этого поверхности тел, получаемых при вращении изопериметрических плоских фигур с общим центром тяжести, равны, равны также объемы тел, получаемых при вращении равновеликих фигур с общим центром тяжести.

Необходимо указать, что центр тяжести контура треугольника и центр тяжести площади треугольника вообще не одно и то же; центр тяжести контура получается следующим образом: если провести средние линии треугольника и в полученный треугольник вписать окружность, то ее центр и будет центром тяжести контура треугольника; он отстоит от стороны a треугольника на расстояние

$$y_a = \frac{h_a}{2} \cdot \frac{b+c}{a+b+c} = \frac{h_a(2p-a)}{4p}.$$

Пользуясь циклической подстановкой, находим расстояния центра тяжести и от других сторон:

$$y_b = \frac{h_b(2p-b)}{4p} \quad \text{и} \quad y_c = \frac{h_c(2p-c)}{4p}.$$

Точка, которую мы в геометрии называем центром тяжести треугольника, есть центр тяжести площади треугольника; это — точка пересечения медиан треугольника, и она отстоит от сторон треугольника соответственно на расстояния $y_a = \frac{1}{3} h_a$, $y_b = \frac{1}{3} h_b$ и $y_c = \frac{1}{3} h_c$.

7. Положение центров тяжести линий и площадей фигур можно найти следующим образом: вычисляют поверхность или объем тела вращения, пользуясь общими формулами, и вычисляют их с помощью теорем Гюльдена, пользуясь при этом неизвестным пока расстоянием $\bar{x}$ центра тяжести линии или площади от оси; сравнивая затем оба полученные выражения, находят величину $\bar{x}$, а таким образом, и положение центра тяжести.

Задачи и вопросы.

1. Осевое сечение конуса — прямоугольный треугольник, площадь которого равна m^2. Найти объем конуса.

2. Высота конуса H. Две взаимно перпендикулярные образующие делят боковую поверхность на две части в отношении 1:2. Найти объем конуса.

3. Основание треугольника a, высота h_a. Треугольник вращается вокруг своего основания a. Найти объем тела вращения.

4. Центр основания одного прямого конуса служит вершиной другого и обратно. В любом осевом сечении образующие одного параллельны образующим другого. В каком отношении боковая поверхность одного конуса делит объем другого?

5. Даны правильная треугольная пирамида и два конуса: один вписан в нее, другой описан. Найти отношение объемов конусов.

6. Конус лежит на плоскости и катится по ней, вращаясь вокруг своей неподвижной вершины; высота конуса h, образующая l. Вычислить поверхность, описываемую высотой конуса.

7. Развертка конуса — сектор радиуса a с углом $\alpha = 90°$. Найти объем конуса.

8. Через вершину конуса и хорду его основания, равную радиусу основания, проведена плоскость. В каком отношении делится этой плоскостью объем конуса?

9. Дан усеченный конус. Радиус одного основания вдвое больше радиуса другого основания, и боковая поверхность равна половине полной его поверхности. Найти его объем, если известно, что площадь осевого сечения равна m^2.

10. Параллелограм, периметр которого p, вращается вокруг оси, проведенной через конец большей диагонали его m, перпендикулярно к этой диагонали. Найти поверхность тела вращения.

11. Треугольник, площадь которого S, вращается вокруг стороны a. Найти объем тела вращения.

12. Площадь параллелограма $ABCD$ равна S. Найти объем тела, получаемого при вращении параллелограма вокруг прямой, проведенной через вершину параллелограма параллельно диагонали, длина которой равна m.

13. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ равна a; отношение сторон меньшей к большей равно m. Прямоугольник вращается вокруг одной из своих диагоналей, и каждый из двух треугольников, на которые он делится диагональю, образует тело вращения. Найти объем общей части обоих тел.

14. Правильный шестиугольник со стороной a делится меньшей его диагональю на две части. При вращении правильного шестиугольника вокруг этой диагонали получаются два тела вращения, из которых одно целиком лежит внутри другого. Найти поверхности обоих тел вращения и объем тела, заключенного между этими двумя поверхностями.

15. Прямоугольная трапеция $ABCD$, основания которой $CB = a$, $AD = b$ и высота $CD = h$, вращается вокруг прямой, перпендикулярной к основанию трапеции и отстоящей от CD на расстояние m, где $m > b$. Найти центр тяжести трапеции. (CD и ось вращения находятся по разные стороны от наклонной боковой стороны.)

Указания к задачам и вопросам.

1. Объем конуса равен $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Требуется найти R и H. Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник и, по условию задачи, прямоугольный, следовательно, $\frac{l^2}{2} = m^2$, где l — образующая, и $l^2 = 2m^2$; но $R^2 + H^2 = l^2$ или $R^2 + H^2 = 2m^2$, легко видеть, что $R = H$; значит

$$2R^2 = 2H^2 = 2m^2 \text{ и } R = H = m.$$

Находим:

$$V = \frac{1}{3}\pi m^2 \cdot m = \frac{1}{3}\pi m^3 \text{ (куб. ед.).}$$

2. При вычерчивании изображения конуса вычерчиваем сперва его осевое сечение ASB, а затем и конус (рис. 313). Надо при этом иметь в виду, что в осевом сечении угол между образующими не может быть меньше 90°, ибо в противном случае нельзя провести двух образующих, которые образовали бы, согласно условию задачи, прямой угол. Требуется найти объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Исходя из условий задачи, проводим образующую $SC \perp SB$. Треугольник BSC прямоугольный и равнобедренный, при этом его катет l — образующая конуса; имеем $BC^2 = 2l^2$ или $BC = l\sqrt{2}$. Согласно условию, πRl — боковая поверхность конуса — делится в отношении 1:2; заключаем, что в таком же отношении делятся и длины дуг окружности основания конуса, и $\smile BC : \smile BAC = 1:2$, а потому $(\smile BC)^\circ = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ и $(\smile BAC)^\circ = 240^\circ$.

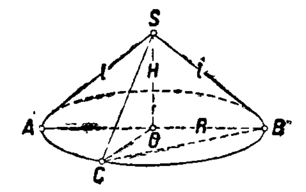


Рис. 313.

Полученный результат указывает, что $BC = R\sqrt{3}$ или $R\sqrt{3} = l\sqrt{2}$, откуда

$$l = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{6}}{2}.$$

Вычисляем затем R конуса. Из треугольника SOB находим: $l^2 = H^2 + R^2$ или $\frac{6R^2}{4} = H^2 + R^2$, откуда $R^2 = 2H^2$.

Итак,

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 2H^2 \cdot H = \frac{2}{3}\pi H^3 \text{ (куб. ед.)}.$$

3. Объем искомого тела вращения равен или сумме (если $\angle B$ и $\angle C$ острые), или разности (если $\angle B$ тупой) объемов двух конусов:

$$V_т = \frac{1}{3}\pi h_a^2 DC \pm \frac{1}{3}\pi h_a^2 BD = \frac{1}{3}\pi h_a^2 (DC \pm BD) = \frac{1}{3}\pi h_a^2 a \text{ (куб. ед.)}.$$

Если применить теорему Гюльдена, то, естественно, получим тот же результат:

$$V_т = \frac{1}{2} a h_a \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} h_a = \frac{1}{3}\pi h_a^2 a \text{ (куб. ед.)}.$$

4. На рис. 314 дано изображение данного тела. Фигура $SKOL$ — ромб, так как $KL \perp SO$ и O_1 середина SO и KL, следовательно,

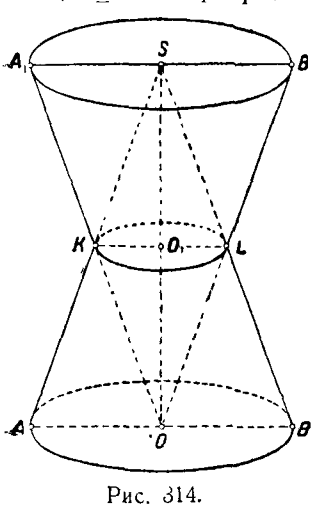


Рис. 314.

$$SO_1 = \frac{1}{2} SO \quad \text{и} \quad O_1L = \frac{1}{2} OB,$$

$$V_{KSLK} = \frac{1}{8} V_K,$$

$$V_{KSLK} = V_{KOLK} = \frac{1}{8} V_K$$

и объем биконуса $SKOL = \frac{1}{4} V_K$, следовательно, оставшийся объем конуса равен $\frac{3}{4} V_K$ и потому отношение объемов равно $\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = 1:3$.

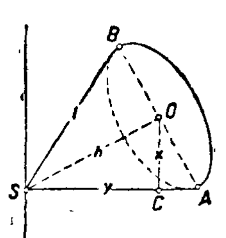


Рис. 315

5. Известно, что объемы двух конусов, имеющих равные высоты, относятся как $R_1^2 : R_2^2$; радиусы же вписанной и описанной в правильный треугольник окружностей относятся как $1:2$, а потому $V_1 : V_2 = 1:4$.

Если бы была дана правильная четырехугольная пирамида, то получился бы другой ответ, а именно $V_1 : V_2 = 1:2$.

6. При вращении конуса его высота образует поверхность нового конуса, радиус основания которого y, высота x и образующая равна высоте h данного конуса (рис. 315).

$$S_{бок} = \pi y h \text{ (кв. ед.)}.$$

Из треугольника SOC находим y:

$$h^2 = l y \quad \text{и} \quad y = \frac{h^2}{l}.$$

Итак,

$$S_{бок} = \pi \frac{h^2}{l} \cdot h = \pi \frac{h^3}{l} \text{ (кв. ед.)}.$$

7. Площадь данного сектора $\frac{\pi a^2 \cdot 90°}{360°} = \frac{\pi a^2}{4}$ равна боковой поверхности $\pi R l$ конуса: $\frac{\pi a^2}{4} = \pi R l$ и $a^2 = 4Rl = 4Ra$, откуда $R = \frac{a}{4}$.

Находим затем H и V конуса:

$$H=\sqrt{l^2-R^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{16}}=\frac{a}{4}\sqrt{15}$$

и

$$V=\frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{16}\cdot\frac{a}{4}\sqrt{15}=\frac{\pi a^3}{192}\sqrt{15} \text{ куб. ед.}$$

8. Оба тела, на которые плоскостью делится конус, имеют одну и ту же высоту, а потому их объемы относятся, как площади их оснований, а именно — как площади двух сегментов. Площадь меньшего сегмента

$$S_1=\frac{\pi R^2}{6}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}=\frac{R^2}{12}(2\pi-3\sqrt{3}),$$

площадь большего сегмента

$$S_2=\pi R^2-\frac{\pi R^2}{6}+\frac{R^2\sqrt{3}}{4}=\frac{R^2}{12}(10\pi+3\sqrt{3}),$$

следовательно,

$$S_1:S_2=(2\pi-3\sqrt{3}):(10\pi+3\sqrt{3})$$

или

$$\frac{S_1}{S_2}\approx\frac{9}{305}\approx 0{,}03.$$

9. $V_{\text{ус. к}}=\frac{1}{3}\pi H(R^2+Rr+r^2)$. По условию $R=2r$, а потому

$$V_{\text{ус. к}}=\frac{1}{3}\pi H(4r^2+2r^2+r^2)=\frac{7}{3}\pi r^2 H.$$

Кроме того, задано, что $\pi(R+r)l=\pi R^2+\pi r^2$, или, заменив R через $2r$, имеем:

$$3rl=5r^2 \text{ и } l=\frac{5r}{3}.$$

Согласно условию

$$H^2=l^2-r^2 \text{ и } H=\sqrt{\frac{25r^2}{9}-r^2}=\frac{4}{3}r.$$

Подставляя в формулу объема найденные значения R, l и H, получим:

$$V_{\text{ус. к}}=\frac{7}{3}\pi r^2\cdot\frac{4}{3}r=\frac{28}{9}\pi r^3.$$

Остается найти r. Площадь осевого сечения

$$S_0=\frac{2R+2r}{2}\cdot H=m^2 \text{ или } 3r\cdot\frac{4}{3}r=m^2,$$

$$\text{или } 4r^2=m^2 \text{ и } r=\frac{m}{2},$$

и, следовательно,

$$V_{\text{ус. к}}=\frac{28}{9}\pi\cdot\frac{m^3}{8}=\frac{7}{18}\pi m^3 \text{ куб. ед.}$$

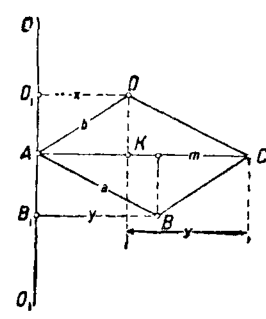


Рис. 316.

10. 1) Следует построить параллелограм $ABCD$ и провести через вершину его A ось вращения $OO_1 \perp AC$ (рис. 316).

2) Из свободных вершин B, C и D параллелограма нужно провести перпендикуляры к оси: $BB_1 \perp OO_1$, $DD_1 \perp OO_1$; диагональ AC перпендикулярна к OO_1 по условию.

3) Обозначим отрезки, необходимые для вычисления поверхности: $AB=a$, $AD=b$, $AC=m$ (дано), $DD_1=x$ и $BB_1=y$.

4)
$$\begin{aligned}S_т &= S_{AB}+S_{BC}+S_{CD}+S_{AD}=\\ &=\pi ya+\pi(y+m)b+\pi(x+m)a+\pi xb=\\ &=\pi(ay+by+bm+ax+ma+bx)=\\ &=\pi[(a+b)y+(a+b)x+(a+b)m]=\\ &=\pi(a+b)(x+y+m).\end{aligned}$$

В полученном выражении является известной только одна величина m. Согласно условию задачи $2a+2b=p$ и $a+b=\frac{p}{2}$, а потому

$$S_т=\frac{1}{2}\pi p(x+y+m).$$

Из рис. 316 усматриваем, что $x+y=m$, следовательно,

$$S_т=\frac{1}{2}\pi p\cdot 2m=\pi mp \text{ кв. ед.}$$

Как видно, при решении задачи в общем виде не требуется **находить отдельно** ни значения a, ни b, ни x, ни y.

По теореме Гюльдена имеем:

$$S_т=p\cdot 2\pi\cdot\frac{m}{2}=p\cdot\pi\cdot m=\pi\cdot m\cdot p \text{ кв. ед.}$$

так как центр тяжести контура параллелограма вследствие его центральной симметрии совпадает с центром симметрии.

11. Высота треугольника $h_a=\frac{2S}{a}$ Вычисляя объем тела вращения по формуле Гюльдена, находим:

$$V_т=S\cdot 2\pi\cdot\frac{2S}{3a}=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{S^2}{a} \text{ куб. ед.}$$

12. 1) Объем тела вращения $V_т=V_{BC}+V_{DC}-V_{AB}-V_{AD}$;

2) $BB_1=DD_1=x$; $CC_1=2x$ (рис. 317);

3) $AB_1=D_1C_1=y$; $B_1C_1=m-y=AD_1$;

4) $V_т=\frac{1}{3}\pi(m-y)\cdot(x^2+4x^2+2x^2)+\frac{1}{3}\pi y(x^2+4x^2+2x^2)-\frac{1}{3}\pi x^2y-$

$$-\frac{1}{3}\pi x^2(m-y)=\frac{7\pi}{3}x^2m-\frac{1}{3}\pi x^2m=2\pi mx^2;$$

5) $mx=S$ и $x=\frac{S}{m}$;

6) $V_т=2\pi m\cdot\frac{S^2}{m^2}=2\pi\cdot\frac{S^2}{m}$ куб. ед.

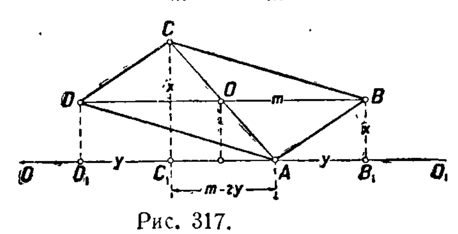


Рис. 317.

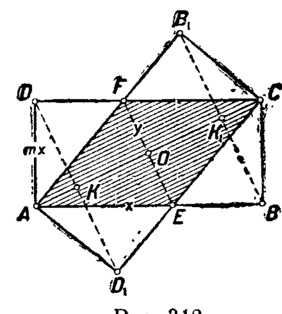


Рис. 318.

По теореме Гюльдена имеем:

$$V_т=S\cdot 2\pi\cdot x=S\cdot 2\pi\cdot\frac{S}{m}=2\pi\cdot\frac{S^2}{m} \text{ куб. ед.}$$

13. Построив осевые сечения обоих тел вращения (рис. 318), замечаем, что их общая часть — ромб $AECF$ ($FE\perp AC$). Вращая его вокруг AC, получим биконус:

$$AB=x;\quad AD=mx;\quad OF=y;\quad OC=AO=\frac{a}{2}.$$

Из подобия треугольников ADC и FOC имеем:

$$\frac{FO}{OC}=\frac{DA}{DC} \text{ или } \frac{y}{\frac{a}{2}}=\frac{mx}{x}, \text{ откуда } y=\frac{am}{2}.$$

$$V_т=2\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2m^2}{4}\cdot\frac{a}{2}=\frac{1}{12}\pi a^3m^2 \text{ куб. ед.}$$

По формуле Гюльдена

$$V=\frac{ay}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{y}{3}=\frac{\pi a\cdot y^2}{3}=\frac{\pi a}{3}\cdot\frac{a^2m^2}{4}=\frac{1}{12}\pi a^3m^2 \text{ куб. ед.}$$

14. Строим изображение правильного шестиугольника $ABCDEF$ и проводим одну из меньших его диагоналей AE (рис. 319). $FF_1=a$ и $AE=a\sqrt{3}$.

Находим площади поверхностей S_{ABCDE} и S_{AFE} обоих тел вращения:

$$S_{ABCDE}=2\pi\left(1\frac{1}{2}a+a\right)a+2\pi a^2=7\pi a^2 \text{ кв. ед.}$$

$$S_{AFE}=2\pi\frac{a}{2}\cdot a=\pi a^2 \text{ кв. ед.}$$

$$V_{ABCDEFA}=2\left[\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(\frac{9}{4}a^2+a^2+\frac{3}{2}a^2\right)-\frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\pi\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{9}{2}a^2=\frac{3}{2}\pi a^3\sqrt{3} \text{ куб. ед.}$$

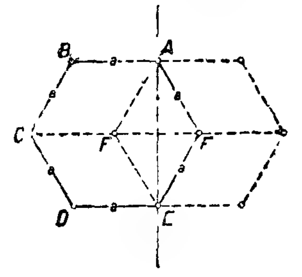


Рис. 319.

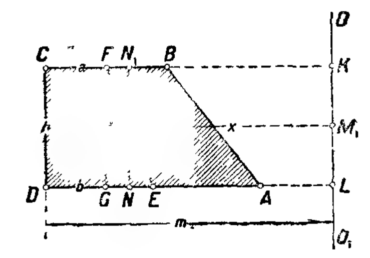


Рис. 320.

15. Следует построить сперва половину осевого сечения тела вращения и определить по нему форму тела вращения (рис. 320).

1) $V_т=V_ц-V_{ус.\ кон.}=$

$$=\pi m^2h-\frac{1}{3}\pi h\left[(m-a)^2+(m-b)^2+(m-a)(m-b)\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\left(3m^2-3m^2-a^2-b^2-ab+3am+3bm\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\left[3m(a+b)-(a^2+b^2)-ab\right].$$

2) Находим объем по формуле Гюльдена. Центр тяжести трапеции лежит на средней линии оснований, ибо, если допустить, что трапеция разбита параллельно основаниям прямыми на тонкие полоски, то центр каждой из них находится в ее середине, а следовательно, центр тяжести всей трапеции лежит на средней линии параллельных сторон. Пусть это будет точка M и ее расстояние от оси OO_1 равно $\bar{x}$. Имеем:

$$V_т=\frac{a+b}{2}\cdot h\,2\pi\bar{x}=\pi(a+b)h\cdot\bar{x},$$

откуда

$$\bar{x}=\frac{V_T}{\pi(a+b)h},$$

это расстояние центра тяжести от оси вращения.

3) Отложив $LN=x$ и проведя $NN_1 \parallel OO_1$, находим точку M — точку пересечения средней линии оснований и NN_1. Это и есть центр тяжести площади трапеции.

Найдем еще отрезок MN. Проведя высоту FG, получаем треугольник FGE, в котором $FG=h$ и $GE=\frac{b-a}{2}$; обозначив $\angle FEG$ через α, находим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2h}{b-a}$. Сторона NE треугольника MNE равна $\frac{b}{2}-(m-x)=\frac{b-2m+2x}{2}$, а потому

$$MN=\frac{b-2m+2x}{2}\operatorname{tg}\alpha=\frac{b-2m+2x}{2}\cdot\frac{2h}{b-a}=\frac{h(b-2m+2x)}{b-a}.$$

Таким образом найдены расстояния точки M от оси, и оно равно x, и от основания трапеции DA, оно равно $\frac{h(b-2m+2x)}{b-a}$.

Задачи на отыскание центров тяжести фигур весьма интересуют учащихся; можно предложить им отыскать центры тяжести фигур (площадей) аналитически и построением, и проверку построения проводить вычислением.

§ 61. Шар.

1. Шару в средней школе обычно уделяется недостаточно внимания, а между тем изучение его весьма существенно для решения значительного числа практических задач. Следует также иметь в виду, что знание свойств шара весьма существенно для изучения астрономии. Все это заставляет настаивать на детальном ознакомлении с шаром и уделить этому вопросу достаточное число часов, что должно быть учтено при планировании времени на проработку учебного материала по геометрии.

При проработке этой темы следует использовать из числа наглядных пособий черный вращающийся глобус, на котором можно чертить мелом, каркасную модель шара и модели частей шара или шар с сечениями, необходимыми для показа частей шара; может быть также использована центробежная машина, с помощью которой можно показать, что шар есть тело вращения; можно, наконец, использовать и географический глобус с нанесенными на нем параллелями и меридианами и решить, пользуясь им, ряд жизненных интересных и полезных задач.

2. Определение шаровой или сферической поверхности следует сопоставить с определением окружности.

1) Окружность есть геометрическое место точек на плоскости, удаленных от одной точки на данное расстояние.	Шаровая поверхность есть геометрическое место точек в пространстве, удаленных от одной точки на данное расстояние.
2) Круг есть часть плоскости, ограниченная окружностью.	Шар есть часть пространства, ограниченная шаровой поверхностью.

Необходимо также дать определение шаровой поверхности и шара, принимая во внимание, что шар есть тело вращения.

Шаровой поверхностью (шаром) *называется поверхность* (тело), *образуемая при вращении полуокружности* (полукруга) *вокруг своего диаметра.* Для иллюстрации этого определения можно воспользоваться центробежной машиной.

Определение отдельных отрезков в шаре следует также сопоставить с определениями отрезков в круге.

1) Отрезок, концами которого служат центр и точка $\frac{\text{окружности}}{\text{поверхности шара}}$, называется *радиусом.*

2) Отрезок, концами которого служат две произвольные точки $\frac{\text{окружности}}{\text{поверхности шара}}$, называется *хордой.*

3) Наибольшая хорда $\frac{\text{круга}}{\text{шара}}$ называется ***диаметром***, она проходит через центр.

4) Все радиусы и все диаметры $\frac{\text{круга}}{\text{шара}}$ равны между собою; все диаметры делятся в центре пополам.

Необходимо еще указать, что ортогональная проекция шара на плоскость при любом его положении в пространстве есть круг.

3. Особо следует рассмотреть сечения шара плоскостью; доказательство, что такое сечение — круг, имеется в любом учебнике. Необходимо только дополнить доказательство указанием, что любая точка, лежащая в плоскости сечения вне или внутри окружности, по которой плоскость пересекает поверхность шара, соответственно или дальше или ближе отстоит от центра сечения, чем любая точка, лежащая на окружности сечения. Следует исследовать формулу $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, где R — радиус шара, r — радиус сечения и d — расстояние сечения от центра, для разных значений d, а именно, приняв 1) $d = 0$, 2) $0 < d < R$, 3) $d = R$ и 4) $d > R$.

В первом случае $r = R$ и получается большой круг шара, во втором случае $r < R$ и получаются малые круги; в третьем случае $r = 0$ и сечение есть точка, лежащая в плоскости касания к шару и, наконец, в четвертом случае r — число мнимое, что указывает на то, что уже не существует общего сечения, так как проводимая плоскость лежит вне шара.

4. Большие круги шара соответствуют диаметрам круга в планиметрии, а плоскость касания к шару — касательной к окружности. Чтобы более полно подчеркнуть наличие соответствия между шаром и кругом, следует сопоставить отдельные теоремы планиметрии и стереометрии:

1) Диаметры круга равны.	Большие круги шара равны.
2) Два диаметра круга пересекаются в одной точке, в центре, и взаимно делятся пополам.	Два больших круга шара пересекаются по диаметру и взаимно делятся пополам.

Если к тому же доказана теорема **через любые две точки на поверхности шара, не лежащие на концах одного диаметра, можно провести только один большой круг,** — можно еще сопоставить следующие теоремы из планиметрии и стереометрии:

3) Хорды, равно удаленные от центра $\frac{\text{круга}}{\text{шара}}$, равны.

4) Из двух неравных хорд $\frac{\text{круга}}{\text{шара}}$ та больше, которая ближе к центру.

На самом деле, через каждую из двух данных хорд можно всегда провести большой круг; большие круги можно совместить и применить для доказательства соответствующую теорему планиметрии. Справедливо и утверждение, что

5) равным хордам соответствуют равные дуги больших кругов, проведенных через эти хорды, и т. д.

Если, кроме того, принять во внимание, что хорде круга в планиметрии соответствует малый круг шара в стереометрии, то можно сравнить еще ряд теорем из планиметрии и стереометрии:

6) $\frac{\text{Малые круги шара}}{\text{хорды круга}}$, равно удаленные от центра $\frac{\text{шара}}{\text{круга}}$, равны.

7) Из двух $\frac{\text{малых кругов шара тот}}{\text{хорд круга та}}$ больше, $\frac{\text{который}}{\text{которая}}$ ближе к центру $\frac{\text{шара}}{\text{круга}}$.

5. Следует сопоставить и задачи на построение касательной и касательной плоскости.

Через точку на окружности провести касательную к ней.	Через точку на поверхности шара провести к ней касательную плоскость.

В обоих случаях каждая из задач дает только одно решение: или прямую — касательную или касательную плоскость.

К окружности провести касательную, параллельную данной прямой.	К шаровой поверхности провести касательную плоскость, параллельную данной плоскости.

Каждая задача дает два решения: или две прямые или две плоскости; метод построения в обоих случаях один и тот же.

Теорема планиметрии: через точку на окружности можно провести только одну прямую, касательную к окружности; аналогичная теорема в стереометрии читается так: через точку на поверхности шара можно провести только одну касательную к ней плоскость. Если же поставить вопрос, сколько можно провести прямых, касательных к шаровой поверхности, через точку, взятую на шаровой поверхности, то ответ будет гласить: бесчисленное множество, и все эти касательные лежат в одной касательной плоскости.

Обращается внимание на то, что на плоскости из внешней точки к окружности можно провести только две касательные; если же вращать окружность с проведенными к ней из внешней точки касательными вокруг оси симметрии — центральной секущей, то в пространстве из одной точки к шару можно провести бесчисленное множество касательных; они являются образующими конуса касания. Указывается также или показывается на рисунке или модели, что можно провести бесчисленное множество прямых, касательных к поверхности шара и параллельных данной прямой: все эти прямые служат образующими цилиндра касания. Следует пояснить учащимся, что конус касания, когда вершина конуса (точка, через которую проходят касательные — образующие конуса) удаляется в бесконечность, неограниченно приближается к цилиндру

касания и что, наоборот, в предельном случае, когда вершина конуса касания, приближаясь к поверхности шара, окажется на поверхности шара, конус касания обращается в плоскость касания.

6. Полная аналогия может быть проведена между взаимным положением двух шаров и взаимным положением двух кругов. В самом деле, если пересечь два шара плоскостью, проходящей через их центры, то в сечении получится два больших круга, взаимное положение которых характеризует и взаимное положение двух шаров. Так, обозначив линию центров двух шаров через d и их радиусы через r_1 и r_2, имеем: если

1) $d > r_1 + r_2$ — шары лежат один вне другого и не касаются друг друга;

2) $d = r_1 + r_2$ — шары внешне касаются;

3) $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ — шары пересекаются, и круг сечения перпендикулярен к линии центров;

4) $d = r_1 - r_2$ — шары внутренне касаются;

5) $d < r_1 - r_2$ — шары лежат один внутри другого и не касаются;

6) $d = 0$ — шары концентрические.

Можно рассматривать и расположение касательных поверхностей по отношению к двум шарам.

В первом случае шары имеют две общие поверхности касания — двойной конус касания внутренний и конус касания внешний; в том случае, когда $r_1 = r_2$, внешний конус касания переходит в цилиндр касания.

Во втором случае шары имеют также две поверхности касания: 1) плоскость касания, проходящую через точку касания шаров перпендикулярно к оси касания, и 2) внешний конус касания, в частном случае, при $r_1 = r_2$ обращающийся в цилиндр касания.

В третьем случае шары имеют только один внешний конус касания и при $r_1 = r_2$ — цилиндр касания.

В четвертом случае шары имеют только одну плоскость касания.

В пятом и шестом случаях шары не имеют общих касательных поверхностей.

Понятно, что рассматриваемые случаи должны быть иллюстрированы соответствующими рисунками. Вопрос о взаимном положении двух шаров следует пояснить на некоторых примерах. Ниже приводится подобного рода задача.

Задача. Даны две концентрические шаровые поверхности; к меньшей из них проведена касательная плоскость и через центр проведена плоскость, дающая в сечении кольцо. Доказать, что оба сечения равновелики.

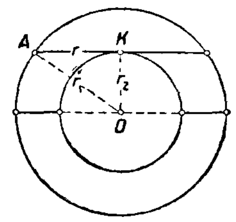


Рис. 321.

Пусть радиусы данных шаров равны r_1 и r_2, где $r_1 > r_2$, и пусть площадь сечения касательной плоскостью равна πr^2, где r — радиус сечения; площадь же кольца, получаемого сечением поверхностей шаров плоскостью, проходящей через центр системы, равна $\pi(r_1^2 - r_2^2)$. Но $r_1^2 - r_2^2 = r^2$, что следует из прямоугольного треугольника OKA (рис. 321), а потому $\pi(r_1^2 - r_2^2) = \pi r^2$, и, следовательно, оба сечения равновелики.

7. Необходимо дать понятие о **кратчайшем расстоянии между двумя точками на поверхности шара.**

Кратчайшим расстоянием между двумя точками, отсчитываемым на шаровой поверхности, называется меньшая из двух дуг большого круга, проведенного через эти две точки.

Учащимся следует дать лишь определение понятия о кратчайшем расстоянии; соответствующее доказательство, что меньшая из двух дуг большого круга, проходящего через данные две точки на поверхности шара, есть кратчайшее расстояние между ними, выходит за пределы элементарного курса геометрии; можно ограничиться указанием, что соответствующая теорема была доказана математиком К. Ф. Якоби (1795—1855). Поясняется также, что на земном „шаре", на поверхности Земли линия, являющаяся кратчайшим расстоянием между двумя точками, называется *геодезической линией*.

Разумеется, что кратчайшее расстояние между двумя точками, измеренное не по поверхности шара, есть хорда шара, концами которой служат две данные точки.

8. Небесполезно рассказать учащимся, что уже александрийские математики Гиппарх, Птоломей и др. начали создавать так называемую сферическую тригонометрию, т. е. геометрию на поверхности шара, и что сферическая тригонометрия возникла главным образом из нужд астрономии, в которой она играет значительную роль, и была закончена трудами Эйлера и Лагранжа. Следует пояснить, что сторонами фигуры на поверхности шара служат дуги больших кругов; выражают эти дуги в градусах и между ними устанавливается определенная числовая зависимость. Так, на рис. 322 дано изображение сферического треугольника ABC, его сторонами служат дуги трех взаимно перпендикулярных больших кругов, и каждая из дуг равна 90°. Должно быть указано, что „стороны" сферического треугольника, выраженные в градусах, не зависят от длины радиуса шара, так как число градусов дуги не зависит от длины радиуса.

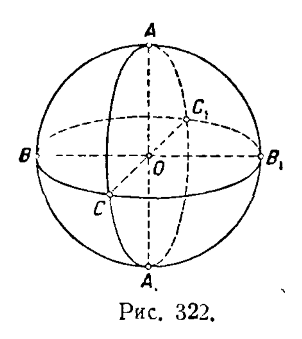


Рис. 322.

Можно упомянуть, что Эвклид построил свою планиметрию на плоскости, математик же Б. Риман (1826—1866) построил новую неэвклидову геометрию, частностью которой являются двумерные образы, созданные на поверхности шара. Другую неэвклидову геометрию создал один из величайших математиков своего времени — казанский профессор Н. И. Лобачевский (1793—1856); у него двумерные образы созданы на псевдосфере. Более подробные указания по данному вопросу имеются в книгах Р. Бонола — „Неэвклидова геометрия" и частично у Филипса и Фишера — „Элементы геометрии".

Части шара и шаровой поверхности.

9. Если пересечь шар плоскостью, то последняя разделит шар на две части, на два шаровых или сферических сегмента; по аналогии: прямая рассекает круг на два круговых сегмента.

Радиус, проведенный из центра шара перпендикулярно к плоскости сечения — основанию шарового сегмента, делится этой плоскостью на две части, из которых часть между основанием сегмента и его сферической поверхностью называется *высотой* сегмента.

Шаровой сегмент можно рассматривать, как тело вращения; он получается, если круговой сегмент вращается вокруг своей высоты. Заметим, что если нет специальной оговорки, что за шаровой сегмент принимают меньший из двух сегментов, на которые делится шар, если высота h сегмента равна радиусу R шара, $h = R$, то сегмент обращается в полушар; понятно, что в этом случае оба сегмента равны.

Часть шара, заключенная между двумя параллельными плоскостями сечения, называется *шаровым слоем*, его боковая кривая поверхность — шаровым поясом, или зоной. Плоскости сечения дают малые круги шара и являются основаниями слоя, расстояние же между ними есть высота слоя. Радиусы r_1 и r_2 оснований шарового слоя вообще не равны между собой. Если один из радиусов, положим r_1, равен 0, то шаровой слой обращается в шаровой сегмент. Если принять основание сегмента за основание конуса, вершина которого находится в центре шара, то тело, состоящее, таким образом, из конуса и сегмента, называется *шаровым*, или *сферическим*, *сектором*; высота сегмента, дополняющего конус до сектора, одновременно служит и высотой сектора.

Сферический сектор можно определить и как тело, получаемое вращением кругового сектора вокруг его крайнего или среднего радиуса. В этом случае крайний или средний радиус — ось вращения. Такой сектор называется *шаровым сектором первого рода*. Если в осевом сечении шарового сектора первого рода угол равен 180°, то такой шаровой сектор обращается в полушар.

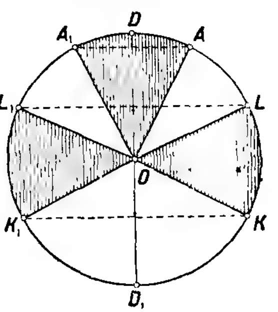


Рис. 323.

Кроме шарового сектора первого рода рассматривают шаровой сектор второго рода, который получается вращением кругового сектора вокруг диаметра DD_1, не совпадающего с крайним радиусом и не пересекающего сектор. Сектор второго рода можно рассматривать или как шаровой слой KLL_1K_1, из которого вынуто два конуса LOL_1 и KOK_1 (рис. 323), или как шар, из которого вынуто два сектора первого рода LOL_1DL и KOK_1D_1K. Если один из радиусов кругового сектора перпендикулярен к оси вращения, то шаровой сектор есть полушар, из которого вынут сектор первого рода. Высотой сектора второго рода служит проекция его дуги на ось вращения.

Все эти части шара следует показать на моделях и показать их образование с помощью центробежной машины.

Вычисление радиуса шара.

10. Следует отметить, что обычно средняя школа не уделяет должного внимания вопросу о вычислении радиуса шара, между тем как измерение и вычисление радиуса шара или его диаметра имеет даже большее практическое значение, нежели вычисление по уже готовым формулам поверхности и объема шара. Опыт показывает, что если предложить учащимся найти радиус или диаметр какого-либо материального шара, то большинство из них не знают, что достаточно зажать шар между двумя параллельными плоскостями, например тисками, а затем измерить расстояние между этими плоскостями; оно и будет равно диаметру шара.

Следует также показать, как измерить и вычислить радиус шара.

когда дана только часть шара, например меньшая его часть. В данном случае следует отшлифовать место излома, и тогда получается шаровой сегмент. Если затем измерить радиус r основания сегмента и его высоту h (рис. 324), то можно построить и вычислить радиус R шара. Действительно, построив прямоугольный треугольник по катету, равному r, и разности h между гипотенузой и другим катетом, мы находим искомую гипотенузу треугольника (рис 324a). Для вычисления радиуса R шара следует воспользоваться равенством:

$$r^2 = h(2R - h) \quad \text{или} \quad r^2 + h^2 = 2Rh,$$

откуда

$$R = \frac{h^2 + r^2}{2h}.$$

Если отшлифовка места излома шара затруднительна, то следует изготовить гипсовый слепок данной части шара и по нему уже произвести указанные измерения, а затем выполнить требуемое построение и вычисление.

В том случае, когда поверхность части шара повреждена в целом ряде мест и неповрежденными сохранились только небольшие участки

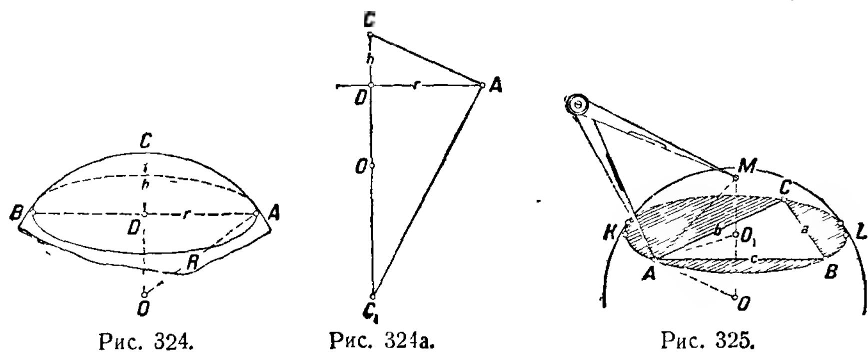


Рис. 324. Рис. 324а. Рис. 325.

поверхности данной части шара, следует использовать циркуль. Установив острие ножки циркуля в одно из неповрежденных мест поверхности шара, например M, дают циркулю такое растворение, чтобы можно было отметить на поверхности шара три точки, положим точки A, B и C, так, что $MA = MC = MB$ (рис. 325). Эти точки A, B и C принимают за вершины треугольника, измеряют циркулем расстояния AB, BC и CA и переносят этот треугольник в определенном масштабе на чертеж. Пусть $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$, тогда радиус r окружности малого круга шара, на которой лежат точки A, B и C, вычисляется по формуле планиметрии $r = \frac{abc}{4S}$. Для вычисления радиуса R примем, что $MA = MB = MC = m$, кроме того, приняв во внимание, что точка M, точка O_1 — центр малого круга и точка O — центр шара лежат на одной прямой, находим из треугольника MO_1A, обозначив MO_1 через x, что $x^2 = m^2 - r^2$ или $x = \sqrt{m^2 - r^2}$, и из треугольника AO_1O, что $R^2 = r^2 + (R - x)^2$ или $R = \frac{r^2 + x^2}{2x}$ или, заменив x через $\sqrt{m^2 - r^2}$, что

$$R = \frac{m^2}{2\sqrt{m^2 - r^2}}.$$

В частном случае, если $a = b = 12{,}0$, $c = 15{,}8$ и $m = 10{,}0$, имеем:

$$r \approx 7{,}97 \text{ и } R \approx 8{,}28.$$

Если, наконец, на шаровой поверхности имеются лишь четыре небольших неповрежденных места и ни одно из них не служит центром окружности, проходящей через остальные три точки, то эти четыре точки принимают за вершины некоторого тетраэдра, и по длине всех шести его ребер, длина которых измеряется циркулем, однозначно определяется тетраэдр, после чего вычисляется радиус шара, описанного около этого тетраэдра. Вычисления эти сложны и выходят за пределы элементарного курса геометрии средней школы, поэтому ограничимся нахождением радиуса описанного шара, проходящего через все четыре вершины тетраэдра, путем построения.

Вычерчивают развертку тетраэдра $SABC$ в плоскости его основания ABC (рис. 326) и строят высоты тетраэдра и углы наклона боковых граней тетраэдра к плоскости основания. Построив высоты SA_1, SB_1 и SC_1 боковых граней и продолжив их до взаимного их пересечения в точке K, находим основание K высоты SK пирамиды. Линейные углы наклона соответствующих боковых граней тетраэдра к плоскости основания

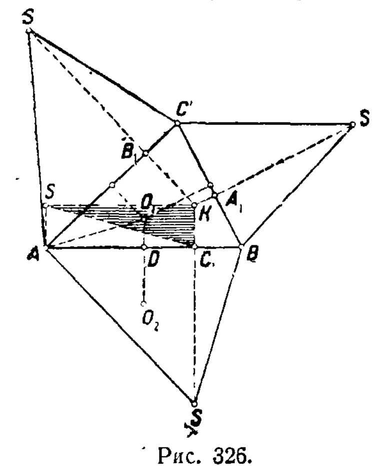


Рис. 326.

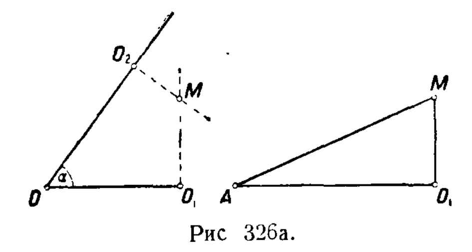


Рис 326а.

образуются прямыми SA_1 и A_1K, SB_1 и B_1K, SC_1 и C_1K, так как отрезки KA_1, KB_1 и KC_1 являются проекциями соответственных высот SA_1, SB_1 и SC_1 боковых граней. Построив прямоугольный треугольник SKC_1 по катету KC_1 и гипотенузе C_1S, получим действительную величину угла наклона боковой грани SAB к плоскости основания ABC; при этом катет SK треугольника SKC_1 равен h — высоте тетраэдра Таким же построением можно найти углы наклона и других боковых граней. Треугольник SKC_1 на рисунке заштрихован.

Все грани тетраэдра — треугольники, вписанные в малые круги описанного шара, а потому, если провести через центры этих кругов перпендикуляры к граням тетраэдра, то проведенные четыре перпендикуляра пересекутся в одной точке, в центре описанного шара. Находим центр O_1 окружности малого круга, в который вписано основание тетраэдра ABC, и центр малого круга O_2, в который вписана одна из боковых граней, положим ABS; отрезки DO_1 и DO_2 — медиатрисы одной и той же стороны AB, а потому точки O_1, D и O_2 лежат на одной прямой; эти же отрезки DO_1 и DO_2 являются отрезками сторон линейного угла α двугранного угла, образуемого плоскостью основания ABC и

плоскостью боковой грани ASB; этот угол α также равен углу, образуемому прямыми SC_1 и KC_1 — высотой бок вой грани и ее проекцией иа плоскость основания ABC. Перпендикуляры O_1M и O_2M, проведенные к плоскостям основания ABC и грани ASB, пересекутся в точке M — центре описанного шара, и образуется четырехугольник O_1DO_2M со сторонами O_1D и DO_2, в котором $\angle O_1DO_2 = \alpha$, $\angle MO_1D = 90°$ и $\angle MO_2D = 90°$. Построив четырехугольник по сторонам O_1D и DO_2, углу α между ними и прямым углам MO_1D и MO_2D (рис. 326а), находим отрезок O_1M — расстояние центра M описанного шара от плоскости основания тетраэдра. Построив затем прямоугольный треугольник MO_1A по катету MO_1 и катету AO_1, равному радиу у малого круга, описанного около ABC, находим гипотенузу MA, которая и есть искомый радиус R описанного шара.

При выполнении указанного построения следует использовать специально изготовленную каркасную модель шара с вписанным в него тетраэдром или стереометрический ящик. Каркасная модель должна иметь откидные боковые грани с проведенными в них высотами.

Нередко приходится иметь дело с гладко отполированной поверхностью части шара, например с частью стеклянного шара, на которой невозможно выполнять измерения с помощью циркуля Тогда для этой цели служит специальный измерительный прибор — с ф е р о м е т р, которым пользуются при измерении радиуса кривизны линз и оптических стекол.

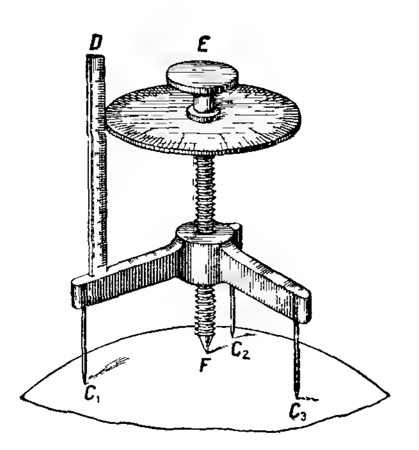


Рис 327.

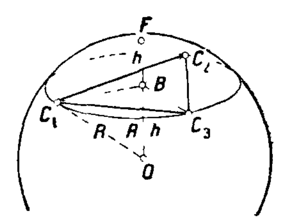


Рис. 328

Сферометр — треножник (рис 327) на трех одинаковой длины заостренных ножках C_1, C_2 и C_3, которые служат вершинами равностороннего треугольника $C_1C_2C_3$; через середину треножника, его центр, проходит винт F; винт заканчивается круглой плоской головкой E с нанесенными на ней делениями; плоская головка разделена на n равных частей, например 100.

Сферометр устанавливают сперва на проверочную, обычно стеклянную, плоскую плитку так, чтобы острие винта касалось плитки, и отмечают затем положение головки E на шкале D, прикрепленной к треножнику

После этого, немного вывинтив винт, ставят сферометр на сферическую поверхность и поворачивают винт до тех пор, пока его острие не коснется испытуемой поверхности; таким образом, все четыре точки — C_1, C_2, C_3 и острие винта F касаются шаровой поверхности.

По шкале D отсчитывают высоту сегмента, в основание которого вписан правильный треугольник $C_1C_2C_3$. Каждое деление шкалы D обычно соответствует одному ходу винта, высота которого наперед известна, а по делениям головки можно узнать и доли этого деления.

Пусть сторона треугольника $C_1C_2C_3$ — основания треножника — равна a (рис. 328), тогда $r=\frac{a}{\sqrt{3}}$; из треугольника же C_1BO, в котором $\angle C_1BO=90^\circ$, находим $R^2-(R-h)^2=r^2$ или $R^2-(R-h)^2=\frac{a^2}{3}$, откуда $R=\frac{3h^2+a^2}{6h}$.

Для каждого сферометра величина a известна, а отрезок BF, равный высоте сегмента h, определяется подсчетом по шкале.

Так, когда $a=4{,}5$ *см* и $h=0{,}5$ *см*, находим $R=7$ *см*.

Если требуется вычислить радиус или диаметр глобуса, то можно поступить так: с помощью полоски миллиметровой бумаги измеряют длину 10° меридиана; пусть эта длина равна a, тогда длина всего меридиана равна $36a$. Если обозначить радиус глобуса через R, то получим:

$$2\pi R=36a \text{ и } R=\frac{36a}{2\pi}\approx 18\cdot 0{,}32a\approx 5{,}8a;$$

при $a=5{,}0$ *см*, $R\approx 29$ *см*.

Следует отметить, что нахождение радиуса шара представляет для учащихся весьма интересную и жизненную задачу. Эта задача дает указание, как можно вычислить радиус земного шара.

Можно также показать учащимся, как нанести на шаровую поверхность с помощью циркуля большие круги. Чертят на плоскости окружность данного радиуса R и делят ее двумя взаимно перпендикулярными диаметрами на четыре равные части. „Взяв в циркуль" хорду, равную стороне вписанного квадрата, отмечают на поверхности шара с помощью циркуля отдельные точки большого круга, при этом острие одной ножки циркуля сохраняет на поверхности шара одно и то же положение.

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ.

1. Окружности каких радиусов можно провести на поверхности шара радиуса R?

2. Где должен находиться источник света, чтобы была освещена половина шаровой поверхности?

3. Дан круг и вне его в пространстве точка. Как должна быть расположена точка относительно круга, чтобы можно было построить через нее и окружность данного круга шар?

4. Где расположены центры всех равных окружностей, лежащих на поверхности данного шара?

5. Широта Москвы $\varphi=55^\circ 45'$ (северная). Найти длину параллели, на которой лежит Москва, принимая землю за шар, радиус которого $R\approx 6370$ *км*.

То же — для Ленинграда ($59^\circ 57'$ северной широты).

6. Ставрополь (Северокавказский край) и Симферополь (Крымская АССР) лежат приблизительно на одной широте 45° (северной). Разница долгот этих городов $\approx 8^\circ$. Найти расстояние между ними по параллели.

7. Определить длину тропика Рака.

8. Определить длину окружности полярного круга.

9. Найти длину дуги меридиана в $1'$.

Указания к задачам и вопросам.

1. Круги, радиусы которых r, удовлетворяют условию $0 \leq r \leq R$.

2. Если источник света находится на конечном расстоянии от шара, то пучок лучей, падающий на шаровую поверхность, освещает только часть поверхности шара, а именно — сегмент, меньший половины поверхности шара; однако, по мере того как источник света удаляется от шара, освещаемая часть шара увеличивается; наконец, если источник света будет неограниченно удаляться от шаровой поверхности, то освещаемая поверхность шара будет неограниченно приближаться к половине шаровой поверхности.

3. Точка может находиться в любом месте пространства, но только не в плоскости данного круга.

4. Центры таких окружностей лежат на сферической поверхности, радиус которой равен d — расстоянию центра окружности круга от центра шара. Если $d = 0$, круги совпадают с большими кругами данного шара, если $d = R$, круги обращаются в точки, лежащие на плоскостях касания к шару; если $d < R$, окружности кругов лежат на поверхности шара.

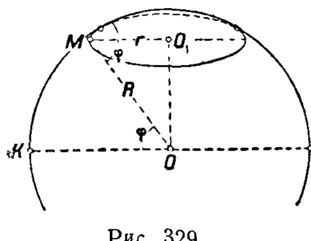


Рис. 329

5. Пусть точка M обозначает Москву (рис. 329); тогда $\smile KM = \varphi = 55°45'$; из треугольника MO_1O находим $O_1M = OM \cdot \cos\varphi$ или $r = R \cdot \cos\varphi$, где r — радиус параллели, R — радиус земли и φ — широта Москвы. Подставляя числовые данные, находим, что окружность параллели равна приблизительно 22 500 *км*. Можно вычислить длину 1° параллели Москвы, она приближенно равна 62,5 *км*. Следует указать учащимся, что радиус любой параллели равен $R \cos\varphi$, где R — радиус земли и φ — широта места.

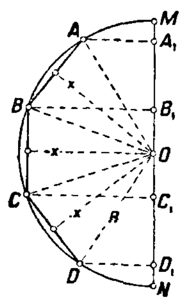


Рис. 330.

6. Сперва следует найти длину всей параллели, на которой лежат поименованные города; эта длина равна $2\pi r$, где $r = R \cdot \cos\varphi = 6370 \cdot \cos 45° = 3185 \cdot \sqrt{2}$, следовательно, $2\pi r = 2 \cdot 3185\pi\sqrt{2} = 6370\pi\sqrt{2}$; дуга в 8° равна

$$\frac{6370\pi\sqrt{2} \cdot 8}{360} = \frac{1274\pi\sqrt{2}}{9} \approx 629 \text{ км}.$$

Так же решаются задачи 7 и 8. Ответы: 36 700 *км* и 15 900 *км*.

9. Если принять $R \approx 6370$ *км*, то длина меридиана равна $2\pi \cdot 6370$ и длина дуги в 1' равна

$$\frac{2\pi \cdot 6370}{360 \cdot 60} \approx 1{,}85 \text{ км} = 185 \cdot 10 \text{ м}.$$

Морская миля, т. е. длина дуги меридиана, равной одной минуте, точнее равна 1854,5 *м*.

Необходимо еще проработать с учащимися ряд примеров на вычисление площадей сечений шара. Примеры имеются в любом сборнике задач по стереометрии.

Поверхность шара и его частей.

11. К выводу формулы для вычисления поверхности шара можно подойти путем предварительного ознакомления учащихся с вычислением поверхности шарового слоя, которая образуется вращением дуги полуокружности вокруг диаметра.

1) Пусть дана дуга AD полуокружности $MADN$, которая вращается вокруг диаметра MN (рис. 330). Вписав в дугу AD правильную ломаную линию $ABCD$, находят поверхность, образуемую вращением этой ломаной вокруг диаметра MN; эта поверхность

$$S_{ABCD} = 2\pi x \cdot A_1B_1 + 2\pi x \cdot B_1C_1 + 2\pi x \cdot C_1D_1 = 2\pi x \cdot A_1D_1,$$

где x — отрезок медиатрисы звена ломаной или апофема и A_1D_1 — проекция ломаной на ось вращения — диаметр MN.

При удвоении числа сторон ломаной площадь поверхности тела вращения S_{ABCD} и длина отрезка медиатрисы x — величины переменные, проекция же A_1D_1 ломаной — величина постоянная.

При неограниченном удвоении числа n сторон ломаной, вписанной в дугу AB, поверхность S_{ABCD} стремится к своему пределу, который представляет собой сферическую поверхность, а именно — поверхность шарового пояса, при этом x — апофема — имеет пределом R — радиус окружности, а A_1D_1, проекция дуги AD на диаметр, является высотой H шарового пояса. Итак, переходя к пределу, получают:

$$S_{\text{ш. п}} = 2\pi RH \text{ кв. ед.}$$

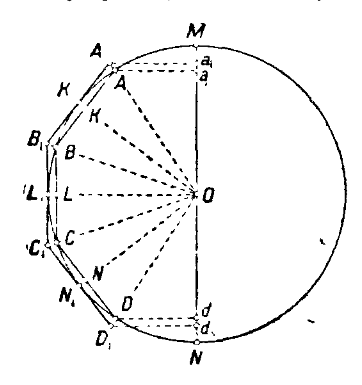


Рис. 331.

Можно показать, что поверхности, образуемые вращением правильных одноименных ломаных линий, одной — вписанной в дугу окружности, другой — описанной около дуги окружности, имеют один и тот же предел при неограниченном удвоении числа их звеньев.

2) Пусть $ABCD$ — ломаная, вписанная в дугу окружности, и $A_1B_1C_1D_1$ — ломаная, описанная около дуги окружности (рис. 331).

Известно, что

$$S_{ABCD} = 2\pi\cdot x\cdot \overline{ad} \quad \text{и} \quad S_{A_1B_1C_1D_1} = 2\pi R\cdot \overline{a_1d_1},$$

следовательно,

$$S_{A_1B_1C_1D_1} - S_{ABCD} = 2\pi R\cdot \overline{a_1d_1} - 2\pi\cdot x\,\overline{ad} = 2\pi\,(R\cdot \overline{a_1d_1} - x\,\overline{ad}) =$$
$$= 2\pi\,(R\cdot \overline{a_1d_1} - x\,\overline{ad} + R\,\overline{ad} - R\,\overline{ad}) =$$
$$= 2\pi\,[R\,(\overline{a_1d_1} - \overline{ad}) + \overline{ad}\,(R - x)].$$

Разность $R - x$ при неограниченном удвоении числа звеньев ломаных неограниченно уменьшается; рассмотрим еще разность $\overline{a_1d_1} - \overline{ad}$; эта разность меньше $A_1A + DD_1 = 2AA_1 = 2\,(OA_1 - R) < 2A_1K = A_1B_1$ и при неограниченном удвоении числа звеньев ломаной звено A_1B_1 неограниченно уменьшается.

При условии, если число сторон правильной ломаной $n\to\infty$, то оба слагаемые $R\,(\overline{a_1d_1} - \overline{ad})$ и $\overline{ad}\,(R - x)$ бесконечно-малы и $S_{A_1B_1C_1D_1} - S_{ABCD}$ = бесконечно-малой.

Примем их общий предел за поверхность шарового пояса, т. е. $S = \lim S_{ABCD} = \lim S_{A_1B_1C_1D_1}$.

Если один конец дуги совпадает с концом диаметра MN, то при вращении дуги вокруг диаметра MN получается поверхность шарового сегмента:

$$S_{\text{ш. сегм}} = 2\pi RH \text{ кв. ед.}$$

Формула для вычисления поверхности тела вращения остается справедливой и тогда, когда оба конца дуги совпадут с концами диаметра;

но в таком случае получается поверхность шара, и при этом $H = 2R$, а потому

$S_ш = 2\pi RH = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2 = \pi D^2$ кв. ед., где D — диаметр шара. Итак, **поверхность шара равна учетверенной площади большого круга шара.**

Равенство $S = 2\pi RH$ читается так: *сферическая поверхность любого из тел: шарового пояса, шарового сегмента и шара равна длине окружности большого круга шара, умноженной на высоту тела,* где под высотой разумеется проекция на диаметр вращаемой дуги, образующей соответствующую поверхность.

Учащимся следует вывести отношение поверхностей двух шаров; оно равно отношению квадратов их радиусов или диаметров. Для закрепления выводов необходимо решить несколько задач на вычисление поверхностей перечисленных тел.

Остановимся на вычислении поверхности полушара. На вопрос, чему равна поверхность полушара, обычно следует ответ: поверхность полушара равна $2\pi R^2$. Данный ответ правилен, если иметь в виду лишь „боковую поверхность" полушара и не учитывать поверхность плоской части полушара, а именно, площадь большого круга — основания полушара; учитывая последнее, имеем, что поверхность полушара равна $2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2$. В силу неопределенности терминологии, что следует понимать под поверхностью полушара, является возможность дачи на поставленный вопрос различных ответов, и правильным, как нам кажется, является ответ, что поверхность полушара равна $3\pi R^2$, так как полушар — тело, и как таковое со всех сторон ограничено поверхностями; поэтому надлежит при вычислении поверхности полушара учесть и площадь круга, т. е. основания полушара, что и дает $3\pi R^2$; что же касается значения ответа $2\pi R^2$, то это — половина поверхности шара.

Итак, поверхность полушара равна $3\pi R^2$, половина же поверхности шара $2\pi R^2$.

Полезно поставить учащимся вопрос: чему равно отношение поверхностей шара и полушара; оно равно $4\pi R^2 : 3\pi R^2 = 4:3$. Можно дать задачу: шар делится тремя попарно взаимно перпендикулярными большими кругами на восемь частей. Найти поверхность одного из восьми полученных тел и отношение поверхности каждой части к поверхности шара.

Кривая поверхность восьмой части шара равна $\frac{4\pi R^2}{8} = \frac{\pi R^2}{2}$ кв. ед. Кроме того, восьмая часть шара ограничена еще тремя четвертями площади большого круга, т. е. $\frac{3}{4}\pi R^2$, а потому поверхность каждого из образовавшихся тел равна $\frac{1}{2}\pi R^2 + \frac{3}{4}\pi R^2 = \frac{5}{4}\pi R^2$, и отношение ее к поверхности шара равно $\frac{5}{4}\pi R^2 : 4\pi R^2 = 5:16$.

Задача 1. Из шара выделяется доля, ограниченная двумя большими полукругами; чему равна поверхность доли шара, заключенной между двумя большими полукругами, образующими угол в 30°?

Поверхность такой доли состоит из кривой поверхности, равной

$\frac{4\pi R^2 \cdot 30^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}\pi R^2$, и площадей двух полукругов, сумма которых равна πR^2, следовательно, вся поверхность ее равна

$$\frac{1}{3}\pi R^2 + \pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Задача 2. Основания цилиндра служат одновременно основаниями шарового пояса, а отношение поверхности пояса и боковой поверхности цилиндра равно 2. Найти длину дуги осевого сечения пояса.

Прежде всего следует обратить внимание на то, что при данных условиях параллельные плоскости, выделяющие из шаровой поверхности шаровой пояс, одинаково удалены от центра шара и круги сечения равны, ибо они являются равными основаниями цилиндра.

Обозначим радиус основания цилиндра и его высоту соответственно через r и h, а радиус шара, которому принадлежит пояс, через R.

Высоты пояса и цилиндра равны, а потому, согласно условию задачи,

$$2\pi Rh = 2\pi rh \cdot 2 \quad \text{или} \quad r = \frac{R}{2}.$$

Следовательно, в осевом сечении диаметр цилиндра $2r = R$ есть сторона правильного вписанного шестиугольника, а потому высота цилиндра — сторона правильного вписанного треугольника. Это значит, что искомая дуга осевого сечения пояса равна

$$\frac{1}{3} \cdot 2\pi R = \frac{2}{3}\pi R \text{ и содержит } 120^\circ.$$

Объем шара и его частей

12. Существует много приемов нахождения объема шара. Один из них приведен в стабильном учебнике. Нахождение объема шара этим методом требует знания суммы квадратов n первых чисел натурального ряда:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Другой прием — геометрический, не совсем строгий — заключается в следующем: представим себе шар покрытым густой сетью меридианов и параллелей, которая разбивает поверхность шара на большое число частей, каждая из которых представляет собой криволинейный четырехугольник или треугольник. Если соединить вершины одного из четырехугольников или треугольников с центром шара и провести через каждую пару радиусов шара плоскость, то получится четырехугольная или треугольная пирамида с вершиной в центре шара, основанием которой служит криволинейный четырехугольник или треугольник. При неограниченном увеличении числа n четырехугольников, на которые разбивается поверхность шара, можно принять эти четырехугольники за плоские четырехугольники, и тогда объем такой „пирамиды" равен $\frac{1}{3} S_1 R$, где S_1 — площадь основания пирамиды и R, радиус шара, — ее высота. Понятно, что сумма объемов всех пирамид представляет собой объем шара, а сумма площадей всех четырехугольников и треугольников составляет поверхность шара, а потому объем шара равен поверхности шара $4\pi R^2$, умноженной на $\frac{1}{3} R$.

Обозначив объем шара через $V_{ш}$, находим:

$$V_{ш} = 4\pi R^2 \cdot \frac{1}{3} R = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ (куб. ед.)}.$$

Если заменить R через $\frac{D}{2}$, где D — диаметр шара, получим:

$$V_{ш} = \frac{1}{6} \pi D^3 \text{ (куб. ед.)}.$$

Тем же приемом находится и объем шарового сектора:

$$V_{ш.сект} = \frac{2}{3} \pi R^2 h,$$

где R — радиус шара, которому принадлежит сектор, и h — высота сектора. При этом вывод для объема сектора второго рода ничем не отличается от вывода объема сектора первого рода.

Следует показать учащимся, что из формулы объема шарового сектора заменой в ней h на $2R$ получается формула объема шара.

Третий прием аналогичен выводу, примененному при нахождении площади круга и поверхности шара. Для нахождения объема таким приемом необходимо сперва доказать вспомогательную теорему или лемму:

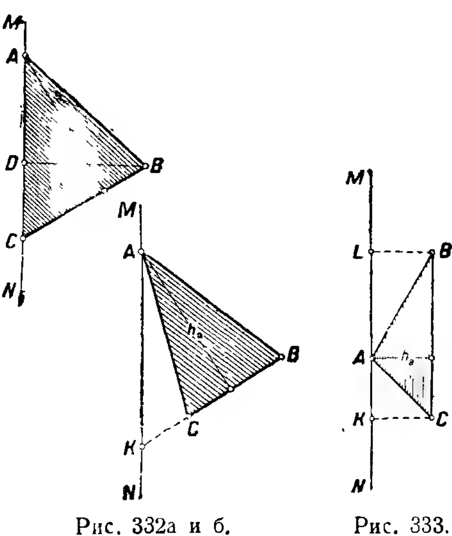


Рис. 332а и б. Рис. 333.

Объем тела, получаемого при вращении треугольника ABC вокруг оси MN, лежащей в плоскости треугольника и проходящей через вершину A и не пересекающей треугольник, равен произведению поверхности, образуемой при вращении стороной a треугольника, на $\frac{1}{3}$ высоты h_a треугольника.

Рассмотрим три случая.

I. **Ось вращения** (рис. 332а) **совпадает со стороной AC треугольника ABC.** При данном условии тело вращения представляет собой два конуса, и объем V тела вращения равен сумме объемов обоих конусов:

$$V_{т.\,вр} = \frac{1}{3} \pi DB^2 \cdot AD + \frac{1}{3} \pi DB^2 \cdot DC = \frac{1}{3} \pi DB^2 (AD + DC) =$$
$$= \frac{1}{3} \pi DB^2 \cdot AC.$$

Но $DB \cdot AC = BC \cdot h_a$, так как каждое из данных произведений есть двойная площадь треугольника ABC и, следовательно,

$$V_{т.\,вр} = \frac{1}{3} \pi \cdot DB \cdot BC \cdot h_a,$$

но $\pi \cdot DB \cdot BC$ — поверхность конуса или поверхность, образуемая вращением стороны BC треугольника ABC вокруг стороны AC. Обозначив эту поверхность через S_{BC}, имеем:

$$V_{т.\ вр} = S_{BC} \cdot \frac{1}{3} h_a.$$

II. **Ось вращения MN не совпадает ни с какой стороной треугольника и не параллельна стороне BC.**

Продолжив сторону BC до пересечения с осью MN в точке K (рис. 332б), имеем:

$$V_{т.\ вр} = S_{BK} \cdot \frac{1}{3} h_a - S_{CK} \cdot \frac{1}{3} h_a$$

или

$$V_{т.\ вр} = (S_{BK} - S_{CK}) \cdot \frac{1}{3} h_a = S_{BC} \cdot \frac{1}{3} h_a.$$

III. Если, наконец, **ось вращения MN параллельна стороне BC** (рис. 333), то

$$V_{т.\ вр.} = \pi CK^2 \cdot LK - \frac{1}{3} \pi CK^2 \cdot AL - \frac{1}{3} \pi \cdot CK^2 \cdot AK = \pi CK^2 \cdot LK -$$

$$- \frac{1}{3} \pi CK^2 (AL + AK) = \pi CK^2 \cdot LK - \frac{1}{3} \pi CK^2 \cdot LK = \frac{2}{3} \pi CK^2 \cdot LK.$$

Но $2\pi \cdot CK \cdot LK = 2\pi CK \cdot BC$ — боковая поверхность цилиндра, т. е. S_{BC}, следовательно,

$$V_{т.\ вр} = \frac{1}{3} CK \cdot 2\pi CK \cdot BC = S_{BC} \cdot \frac{1}{3} h_a.$$

При помощи данной вспомогательной теоремы получается объем шарового сектора.

Пусть дан круговой сектор AOB, в дугу которого вписана правильная ломаная линия $ACDB$ (рис. 334). Если соединить концы A, C, D и B ломаной с центром O окружности, получаем треугольники AOC, COD и DOB; вращая эти треугольники вокруг оси MN — диаметра окружности, получаем объем V тела вращения, равный объему трех тел, образуемых вращением трех треугольников вокруг оси MN

$$V = S_{AC} \cdot \frac{1}{3} x + S_{DC} \cdot \frac{1}{3} x + S_{DB} \cdot \frac{1}{3} x =$$

$$= (S_{AC} + S_{DC} + S_{DB}) \cdot \frac{1}{3} x = S_{ACDB} \cdot \frac{1}{3} x,$$

где x — апофема правильной ломаной линии.

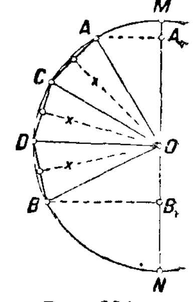


Рис. 334.

При неограниченном удвоении числа сторон ломаной линии ломаная стремится к своему пределу — к дуге AB сектора AOB, апофема x стремится к своему пределу — к радиусу R, а объем тела — к объему шарового сектора, поверхность же тела, образуемая вращением ломаной, — к поверхности шарового слоя; эта поверхность равна $2\pi Rh$, где h — проекция дуги на ось вращения или высота слоя, а следовательно, и сектора. Итак,

$$\lim V = \lim_{n \to \infty} \left(S_{ACDB} \cdot \frac{1}{3} x \right) = \frac{1}{3} \lim_{n \to \infty} S_{ACDB} \cdot \lim_{n \to \infty} x$$

$$V_{ш.\ сект} = \frac{1}{3} \cdot 2\pi Rh \cdot R = \frac{2}{3} \pi R^2 h \text{ (куб. ед.)}.$$

При $h=2R$ получаем объем шара:

$$V_ш=\frac{2}{3}\pi R^2\cdot 2R=\frac{4}{3}\pi R^3 \text{ (куб. ед.)},$$

или, заменив R через $\frac{D}{2}$, где D — диаметр шара, **имеем:**

$$V_ш=\frac{1}{6}\pi D^3 \text{ (куб. ед.)}.$$

Формулу $V_ш=\frac{4}{3}\pi R^3$ можно переписать так: $V_ш=4\pi R^2\cdot\frac{1}{3}R$, и, таким образом, **объем шара равен его поверхности, умноженной на $\frac{1}{3}$ радиуса шара.**

Можно показать аналогично тому, как это было сделано выше по отношению к объему конуса, с учетом некоторых особенностей при выводе объема шара, что объемы, получаемые вращением вписанных в круг и описанных около него правильных многоугольников, имеют общий предел.

Данный вывод формулы объема шара удобен тем, что он аналогичен выводу формулы поверхности тел: конуса, усеченного конуса и цилиндра; он позволяет более просто вычислить объем шарового слоя; вспомогательная теорема может быть самостоятельно использована при решении задач.

Следует упомянуть, что шаровой сектор шара радиуса R, сферическая поверхность которого равна R^2 кв. ед., называется *стерадианом*; объем такого сектора равен $\frac{1}{3}R^3$. Отсюда следует, что шар данного радиуса R может быть сплошь заполнен 4π стерадианами, так как поверхность шара равна $4\pi R^2$ и $\frac{4}{3}\pi R^3 : \frac{1}{3}R^3=4\pi$. Стерадиан — единица для измерения телесных углов. Этой единицей пользуются в физике в разделе оптики, когда рассматривают световой эффект источника света.

Четвертый прием вычисления объема шара основан на теореме Кавальери. Нахождение объема шара на основании этой теоремы дано в стабильном учебнике (ч. 2, стр. 109, § 8) и там же (на стр. 111, § 9) дан вывод объема шарового сегмента, основанный на той же теореме.

Если находить объем шара и шарового сегмента по теореме Кавальери, то объем шарового сектора нужно рассматривать как сумму объемов двух тел, из которых он может быть составлен: конуса и дополняющего его шарового сегмента.

Наконец, пятый прием вычисления объема шара основан на применении формулы Ньютона-Симпсона:

$$V_ш=\frac{1}{6}H(Q+q+4Q_{ср}) \text{ (куб. ед.)}.$$

Шар удовлетворяет требованию этой теоремы, а именно, любое сечение шара плоскостью есть функция не выше второй степени его расстояния от основания шара. В самом деле, пусть AB — диаметр шара (рис. 335) и перпендикулярно к нему проведена касательная плоскость P и сечение, ей параллельное. Обозначив расстояние плоскости сечения от

касательной плоскости через h, имеем: площадь сечения

$$\pi r^2 = \pi [R^2 - (h - R)^2] = \pi h (2R - h) = 2\pi Rh - \pi h^2.$$

Для шара $H = 2R$, $Q = 0 = q$ и $Q_{ср} = \pi R^2$, а потому

$$V_{ш} = \frac{1}{6} 2R (4\pi R^2) = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ (куб. ед.)}.$$

Объем шарового сегмента.

13. Объем шарового сегмента можно рассматривать как разность между объемом соответствующего шарового сектора и объемом конуса (рис. 336):

$$V_{ш.\ сгм} = V_{ш.\ сект} - V_{кон} = \frac{2}{3} \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi r^2 (R - h) =$$
$$= \frac{1}{3} \pi [2R^2 h - r^2 (R - h)],$$

но $r^2 = h (2R - h)$, а потому

$$V_{ш.\ сегм} = \frac{1}{3} \pi [2R^2 h - h \cdot (2R - h)(R - h)] =$$
$$= \frac{1}{3} \pi h (2R^2 - 2R^2 + Rh + 2Rh - h^2) =$$
$$= \frac{1}{3} \pi h (3Rh - h^2) = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right).$$

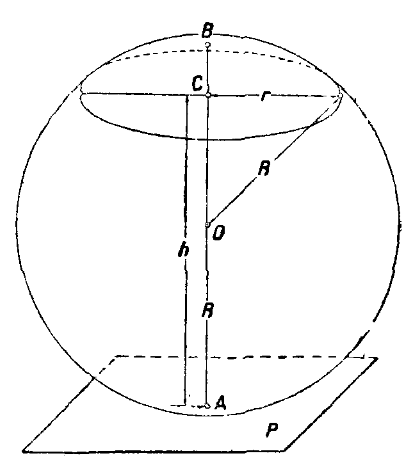


Рис. 335.

Формула может быть преобразована так, чтобы в нее входил радиус основания сегмента. Вывод ее может быть предоставлен самим учащимся.

Из равенства $(2R - h) h = r^2$ или $2Rh - h^2 = r^2$ получаем:

$$R = \frac{h^2 + r^2}{2h}.$$

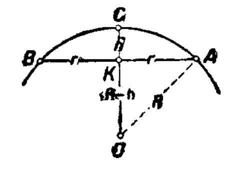


Рис. 336.

Формула $V_{ш.\ сгм} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$ преобразуется так:

$$\pi h^2 \left(\frac{h^2 + r^2}{2h} - \frac{h}{3}\right) = \frac{\pi h^2}{6h} (3h^2 + 3r^2 - 2h^2) = \frac{\pi h}{6} (h^2 + 3r^2) = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi r^2 h}{2}.$$

Необходимо, чтобы учащиеся, анализируя формулу, усмотрели, что объем шарового сегмента равен сумме объема шара диаметра h и половины объема цилиндра, основание которого равно основанию шарового сегмента, а высота — высоте сегмента. Аналогично ранее полученная формула позволяет считать объем шарового сегмента равным объему цилиндра,

у которого радиус основания равен высоте h сегмента, а высота — радиусу шара, уменьшенному на $\frac{1}{3}$ высоты сегмента.

Такого рода истолкование формулы способствует лучшему запоминанию самой формулы и приучает учащихся сопоставлять величину объемов отдельных тел, что особенно ценно при решении задач на построение с помощью алгебраического анализа. Желательно при этом дать и наглядное представление такого рода истолкованию. Так, на рисунке 337 дано наглядное истолкование второй из приведенных формул.

Следует применить каждую из формул для рассмотрения отдельных частных случаев, первую — приняв $h=2R$, и вторую — приняв $r=0$ и $h=2R$. В обоих случаях шаровой сегмент обращается в шар. Действительно, в первом случае, при $h=2R$, имеем:

$$V_{ш}=\pi\cdot 4R^2\left(R-\frac{2R}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Во втором случае, при $r=0$ и $h=2R$, имеем:

$$V_{ш}=\frac{8\pi R^3}{6}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Рассмотрение частных случаев позволяет учащимся убедиться в справедливости обеих формул.

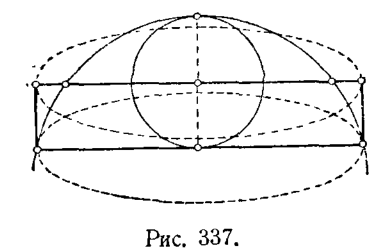


Рис. 337.

Рис. 338.

Несколько слов о пользовании справочником. Иногда наблюдается, что учащиеся, прежде чем приступить к решению какой-либо задачи, обращаются к справочнику, ища ответ на поставленный в задаче вопрос, но, конечно, не находят его в нем. С подобного рода пользованием справочником надо бороться: следует внушить учащимся, что к справочникам они могут обращаться для проверки, правильно ли записана ими та или иная формула. Определенный минимум формул учащиеся должны твердо помнить.

14. Вывод формулы объема шарового слоя.

Заметим, что шаровой слой (рис. 338) можно рассматривать состоящим из двух тел: первого, получаемого при вращении кругового сегмента AD, и второго — усеченного конуса $ABCD$. Объем первого из них представляет собой разность между объемом шарового сектора и тела, получаемого при вращении треугольника AOD, т. е.

$$\frac{2}{3}\pi R^2h-S_{AD}\cdot\frac{1}{3}h_1=\frac{2}{3}\pi R^2h-2\pi h_1\cdot h\cdot\frac{1}{3}h_1=\frac{2}{3}\pi R^2h-\frac{2}{3}\pi h_1^2\cdot h=$$

$$=\frac{2}{3}\pi h\left(R^2-h_1^2\right)=\frac{2}{3}\pi h\cdot DK^2=\frac{2}{3}\pi h\cdot\frac{AD^2}{4}=\frac{1}{6}\pi AD^2\cdot h.$$

Объем усеченного конуса равен $\frac{1}{3}\pi h(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)$, а потому объем слоя

$$V_{\text{шар. сл}}=\frac{1}{6}\pi AD^2h+\frac{1}{3}\pi h(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)=$$
$$=\frac{1}{6}\pi h(AD^2+2r_1^2+2r_2^2+2r_1r_2).$$

Но, если провести $AM\perp DC$, то из треугольника AMD имеем:

$$AD^2=h^2+(r_1-r_2)^2,$$

а потому

$$V_{\text{шар. сл}}=\frac{1}{6}\pi h(h^2+r_1^2+r_2^2-2r_1r_2+2r_1^2+2r_2^2+2r_1r_2)=$$
$$=\frac{1}{6}\pi h(h^2+3r_1^2+3r_2^2).$$

Обращаясь к объему тела, полученного при вращении сегмента,

$$V_{\text{„кольца"}}=\frac{1}{6}\pi AD^2\cdot h,$$

рассмотрим частный случай, когда хорда AD параллельна оси вращения, т. е. диаметру шара; итак, при $AD=h$ имеем:

$$V_{\text{„кольца"}}=\frac{1}{6}\pi AD^3;$$

снова получен прежний вывод.

Понятно, что в классных занятиях с учащимися можно ограничиться только одним каким-либо выводом формулы как объема шара, так и объема шарового слоя и других частей шара.

Советуем придерживаться основных выводов, данных в стабильном учебнике; иные выводы могут быть проработаны в кружках с наиболее успевающими учащимися или же могут быть даны как темы для рефератов учащихся; ясно, что в последнем случае следует предварительно дать учащемуся указания об основных принципах подхода к решению в том или другом случае.

Другой прием нахождения объема шарового слоя приведен в стабильном учебнике; объем шарового слоя рассматривается как разность объемов двух шаровых сегментов.

Необходимо дать учащимся соответствующее истолкование формулы:

$$V_{\text{шар. сл}}=\frac{1}{2}\pi r_1^2h+\frac{1}{2}\pi r_2^2h+\frac{1}{6}\pi h^3;$$

объем шарового слоя равен сумме: 1) объемов двух цилиндров, для одного из которых основанием служит нижнее основание слоя, для другого — верхнее основание слоя, высота же каждого из цилиндров равна половине высоты слоя, и 2) объема шара, диаметр которого равен высоте слоя (рис. 339). Формулу эту полезно иллюстрировать соответствующими наглядными пособиями.

Последний вывод полезно проверить: 1) для случая, когда $r_2=0$, шаровой слой обращается в шаровой сегмент; в самом деле:

$$V_{\text{шар. сл}}=\frac{1}{2}\pi r_1^2h+\frac{1}{6}\pi h^3=\frac{1}{6}\pi h(3r_1^2+h^2);$$

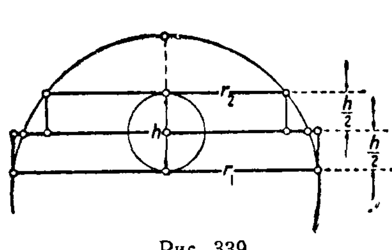
получена та же формула, что и ранее выведенная; 2) для случая, когда $r_1 = 0$, $r_2 = 0$ и $h = 2R = D$, шаровой слой обращается в шар; действительно, при указанных условиях имеем:

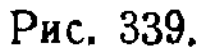
$$V_{\text{ш. сл}} = \frac{1}{6}\pi D^3 = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

известная учащимся формула объема шара.

Наконец, следует рассмотреть и случай, когда $r_1 = r_2$, т. е. когда оба основания слоя равны и, следовательно, отстоят от центра на одно и то же расстояние (рис. 340); при этом условии имеем:

$$V_{\text{ш. сл}} = \pi r_1^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3,$$




Рис. 339.

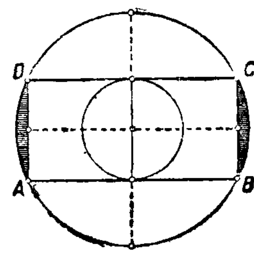


Рис. 340.

и объем шарового слоя равен сумме объемов цилиндра, радиус основания которого r_1 и высота h, и шара диаметра h. С другой стороны, объем слоя равен объему цилиндра плюс объем тела, получаемого при вращении кругового сегмента AD, хорда которого параллельна оси шарового слоя.

Таким образом, можно притти к следующему выводу:

Если круговой сегмент вращается вокруг диаметра круга и при этом хорда сегмента параллельна диаметру, то объем тела вращения равен $\frac{1}{6}\pi a^3$ куб. ед. Объем этот, как показывает формула, не зависит от радиуса круга, а зависит исключительно от длины **хорды a.**

Такой результат неожидан для учащихся и возбуждает в них сомнение в его справедливости. Необходимо воздействовать на интуицию учащихся и указать на то, что чем больше радиус кругового сегмента, хорда которого остается равной a, тем меньше самый сегмент (рис. 340): и при своем вращении вокруг диаметра больший сегмент опишет тело с небольшим сечением, а меньший сегмент — с большим сечением.

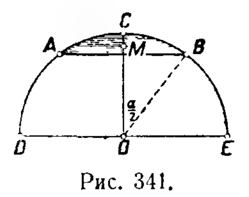


Рис. 341.

15. Можно остановиться и на вопросе об отыскании центра тяжести сегмента и сектора в 30°, 45°, 60°, 90°, 180°.

1) Пусть требуется определить центр тяжести площади сегмента ABC, радиус основания которого r и $\smile AB = a^\circ$ (рис. 341). Центр тяжести сегмента должен лежать на медиатрисе хорды AB; пусть центр тяжести находится в точке M и отрезок $MO = x$; объем тела, получаемого при вращении сегмента вокруг диаметра DE, параллельного хорде AB, равен $\frac{1}{6}\pi(2r)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$; но по фор-

муле Гюльдена этот же объем равен $Q \cdot 2\pi\overline{x}$. Находим Q — площадь кругового сегмента.

$$Q = S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{1}{2} R^2 \sin\alpha = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right),$$

и, следовательно,

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi\overline{x} \cdot \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right).$$

Но $r = R\sin\frac{\alpha}{2}$, а потому $4\pi R^3 \sin^3\frac{\alpha}{2} = 3\pi R^2\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right)\overline{x}$, откуда

$$\overline{x} = \frac{4\pi R^3 \sin^3\frac{\alpha}{2}}{3\pi R^2\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right)} = \frac{4}{3}R\,\frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\frac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha}.$$

Таким образом найдено расстояние OM, а следовательно, по вычислении x, и центр тяжести M шарового сегмента.

2) Пусть дан сектор AOB и $\angle AOB = 60°$ (рис. 342). Найдем центр тяжести шарового сектора в $60°$, радиус которого равен R.

Центр тяжести сектора должен лежать на биссектрисе угла AOB, пусть это будет точка M. Тогда по теореме Гюльдена

$$V_{\text{шар. сект}} = (\text{пл. сектора}) \cdot 2\pi\overline{x},$$

где $\overline{x} = OM$. Диаметр $DE \perp OC$.

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2}{6},$$

где R — радиус круга. Следовательно, объем шарового сектора

$$V_{\text{шар сект}} = \frac{\pi R^2}{6} 2\pi\overline{x}.$$

С другой стороны,

$$V_{\text{шар. сект}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

где $h = AB = a_6 = R$ и $\frac{\pi R^2}{6} 2\pi\overline{x} = \frac{2}{3}\pi R^3$,

откуда

$$\overline{x} = \frac{2R}{\pi} \approx 0{,}637R.$$

Таким же приемом можно отыскать центры тяжести других секторов. Центры тяжести некоторых фигур и линий, наиболее часто встречающихся в практике, приведены в справочнике Hütte, т. I.

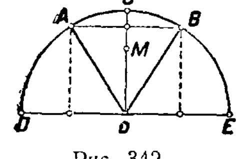


Рис. 342.

16. Следует рассмотреть с учащимися задачу: в многогранник вписан шар так, что он касается всех его граней. По данной полной поверхности S многогранника и его объему V найти радиус вписанного в него шара.

Решение. Если соединить центр вписанного шара со всеми вершинами многогранника, то можно его разбить по числу его граней на n пирамид; основание каждой пирамиды — грань многогранника, а высота —

радиус шара. Суммируя объемы всех n пирамид, находим, что объем V многогранника равен полной его поверхности, умноженной на $\frac{1}{3}$ радиуса r вписанного шара, т. е. $V = \frac{1}{3} S_n \cdot r$ и $r = \frac{3V}{S_n}$.

Данная формула справедлива для любых тел, в которые можно вписать шар.

Проверим формулу на примере шара, вписанного в конус; радиус шара r. Для конуса имеем:

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H \text{ (куб. ед.)}$$

$$S_{\text{п. к}} = \pi R l + \pi R^2 = \pi R (R + l) \text{ (кв. ед.)}.$$

Из осевого сечения конуса, в который вписан шар радиуса r, получаем

$$r:(H - r) = R:l,$$

следовательно,

$$rl = RH - Rr \quad \text{и} \quad r = \frac{RH}{R + l}.$$

Для проверки справедливости формулы $V = S_n \cdot \frac{1}{3} r$ следует подставить в правую ее часть значения S_n и r; находим:

$$V = \pi R (R + l) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{RH}{R + l} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Полученный результат показывает, что формула $V = \frac{1}{3} S_n \cdot r$ верна для вычисления объема конуса. Так же можно проверить, что формула $V = \frac{1}{3} S_n \cdot r$ справедлива и для цилиндра и усеченного конуса, при условии, что в эти тела можно вписать шар.

17. Необходимо обратить должное внимание на осмысленное выполнение учащимися чертежа, изображающего шар, описанный около какого либо тела или вписанный в какое-либо тело; чертежи эти представляют для учащихся значительные трудности.

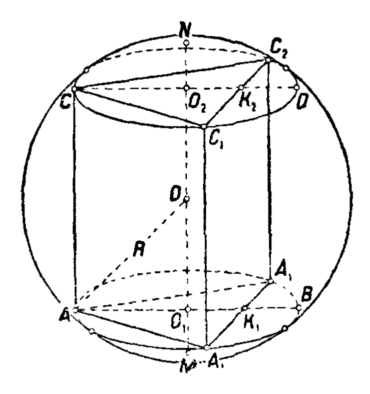


Рис. 343.

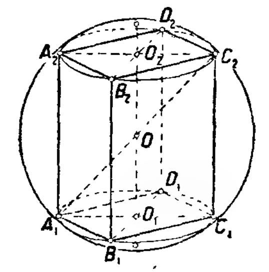


Рис. 344.

1) Обучение построению следует начинать с вычерчивания шара, вписанного в пирамиду или в призму, когда таковое возможно.

Основания вписанной в шар прямой призмы лежат в параллельных малых кругах шара и отстоят от центра шара на одинаковое расстояние, которое равно половине высоты призмы. Ниже указывается после-

довательность вычерчивания вписанной в шар правильной треугольной призмы.

Чертят большой круг шара, совпадающий с плоскостью чертежа, и проводят в нем две равные параллельные хорды AB и CD и два малых круга, диаметрами которых служат эти хорды (рис. 343); в каждом из построенных малых кругов проводят хорду, перпендикулярную к диаметру малого круга и делящую радиусы O_1B и O_2D пополам; хорды A_1A_2 и C_1C_2 — стороны правильных вписанных в малые круги треугольников AA_1A_2 и CC_1C_2. Эти треугольники — основания призмы, и отрезки AK_1 и CK_2 — высоты этих треугольников. Если затем соединить точки C и A, C_1 и A_1, C_2 и A_2, то получится искомая правильная треугольная призма, вписанная в шар радиуса $R=OA$; точки O_1, O и O_2 лежат на одной прямой, на оси призмы, совпадающей с диаметром шара. Можно ограничиться одним разрезом CAK_1K_2 сложного тела, проходящим через ребро и ось призмы, и помнить, что отрезок $O_1K_1=O_2K_2$ равен $\frac{1}{3}$ высоты треугольного основания призмы.

Когда число сторон основания правильной призмы нечетное, то обычно строят лишь сечение, проходящее через ребро и ось призмы.

Если число сторон основания вписанной в шар правильной призмы четное, то можно ограничиться вычерчиванием сечения, которое совпадает с наибольшим диагональным сечением основания; это сечение проходит через центр шара, через центр шара проходят также и наибольшие диагонали призмы, при этом они равны диаметру шара. На рис. 344 дано изображение сложного тела: вписанная в шар правильная четырехугольная призма, диагональное сечение $A_1C_1C_2A_2$ и диагональ A_1C_2 призмы, которая одновременно является диаметром описанного шара.

2) Если требуется вписать в шар правильную пирамиду, то следует помнить, что вообще основание пирамиды лежит в плоскости малого круга, в частном случае — в плоскости большого круга, и что высота пирамиды проходит через центр шара; понятно, что диаметр шара перпендикулярен к плоскости основания пирамиды. На рис. 345 и 346 даны правильные треугольная и четырехугольная пирамиды, вписанные в шар. При вычерчивании вписанной в шар правильной треугольной или четырехугольной пирамиды можно ограничиться построением лишь одного сечения, проходящего через ребро и высоту.

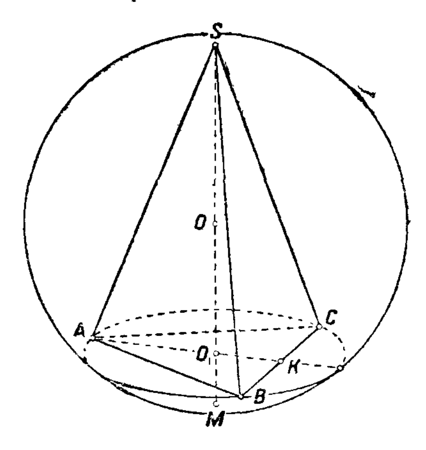


Рис. 345.

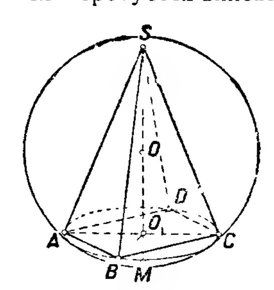


Рис. 346.

3) Если прямой круговой цилиндр вписан в шар, то основаниями его служат два параллельных и равных малых круга; у прямого кругового конуса, вписанного в шар, основанием служит малый или большой круг шара, высота такого конуса проходит через центр шара, перпендикулярно к плоскости основания конуса.

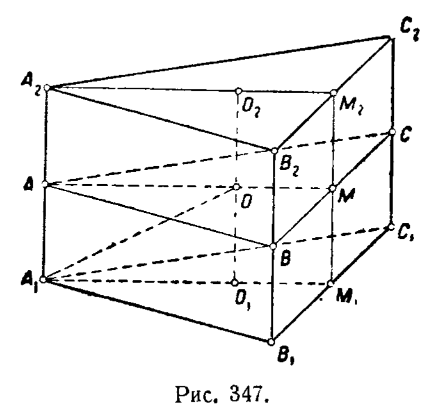


Рис. 347.

4) Когда рассмотрено построение тел, вписанных в шар, следует рассмотреть построение шара, вписанного в прямую призму, прямой круговой цилиндр, правильную пирамиду и прямой круговой конус; следует предварительно указать учащимся, при каких условиях можно вписать шар в прямую призму и в прямой круговой цилиндр. Эти условия — следующие: необходимо, чтобы диаметр вписанного шара был равен высоте призмы или цилиндра. Это условие необходимое, но не достаточное. В прямую призму можно вписать шар при условии, если основание ее — описанный многоугольник, и диаметр окружности, вписанной в основание, равен высоте призмы; вписать шар можно только в прямой круговой цилиндр, если он равностороний. Следует показать учащимся, как выполняется построение шара, вписанного в какое-либо тело, например в правильную треугольную призму.

Построим правильную треугольную призму со стороной a и высотой h, равной $2r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, где r — радиус вписанной в основание окружности (рис. 347); высота $h = O_1O_2$ — ось призмы; середина O высоты O_1O_2 — центр описанного шара, отрезок OA_1 — его радиус. Если провести среднее сечение ABC призмы и вписать в него круг, то последний является большим кругом вписанного в призму шара, этот большой круг шара касается боковых граней призмы, а следовательно, и шар касается этих граней.

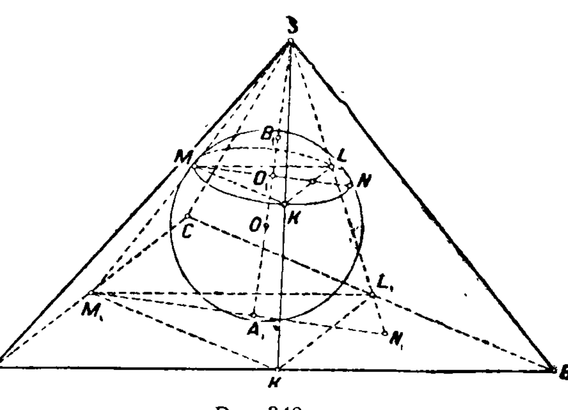


Рис. 348.

В правильную четырехугольную призму можно вписать шар только тогда, когда эта призма — куб. Центр шара, вписанного в куб, совпадает с центром куба, а ось куба есть диаметр шара.

Аналогичными рассуждениями указывается учащимся, как вписать шар в правильную шестиугольную призму и т. д. Следует выполнить с учащимися построение шара, вписанного в равносторонний цилиндр.

Если шар вписан в правильную пирамиду, то он касается центра основания пирамиды, и диаметр его лежит на высоте пирамиды; вписанный в пирамиду шар касается граней ее и, следовательно, апофем пирамиды. При вычерчивании шара, вписанного в пирамиду, следует сперва вычертить пирамиду, ее апофемы и высоту, а затем уже шар.

Сечение пирамиды, проведенное через точки касания шара с боковыми гранями пирамиды, есть правильный многоугольник, который подобен основанию и описан около малого круга шара. При вычерчивании шара, вписанного в правильную пирамиду, положим треугольную, следует сперва начертить большой круг шара, совпадающий с плоскостью чертежа, а затем на некотором расстоянии от центра — малый круг MN (рис. 348) и вписать в последний правильный треугольник MKL; после этого продолжают диаметр A_1B_1, перпендикулярный к малому кругу, на некоторое расстояние за поверхность шара положим до некоторой точки S, и проводят из точки S лучи SM, SK и SL, SM_1 до пересечения с $M_1N_1 \parallel MN$, далее $M_1L_1 \parallel ML$, $M_1K_1 \parallel MK$ и $L_1K_1 \parallel LK$. Проведя затем

через	M_1	прямую AC,	параллельную	K_1L_1,
„	K_1	„ AB,	„	M_1L_1,
„	L_1	„ BC,	„	M_1K_1,

получают пирамиду $SABC$, в которую вписан шар, при этом отрезки SM_1, SK_1 и SL_1 являются апофемами.

Более просто выполняется построение шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду. В последнем случае можно ограничиться построением сечения, которое проходит через апофемы двух противоположных граней пирамиды и дает большой круг шара, касающийся апофем и основания пирамиды (рис. 349).

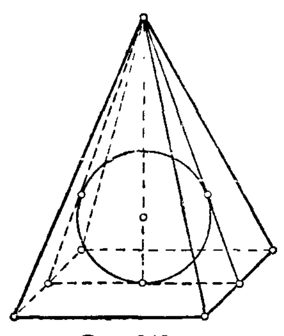


Рис. 349.

При решении задач, в которых требуется вычертить конус и шар, вписанный в него, можно ограничиться построением только осевого сечения конуса — треугольника, описанного около большого круга вписанного шара.

После этого для учащихся меньше будет затруднений при вписывании шара в усеченную пирамиду и в усеченный конус. Понятно, что подобные построения следует связать с решением той или иной задачи.

18. Необходимо указать, что надлежит приучать учащихся выполнять решение задачи на вычисление поверхности или объема тел, а также отдельных элементов тел, в определенной последовательности. Учащийся прочитывает задачу, выясняет, что дано и что требуется найти, и, если нужно, набрасывает от руки чертеж, учитывая заданные условия задачи; после этого учащийся, исходя из вопроса задачи, должен записать нужную для решения задачи формулу, положим, формулу поверхности или объема тела, и установить, какие отрезки, кроме данных, должны быть ему известны для решения задачи; лишь после этого он может приступить к вычислению длины отдельных нужных ему отрезков, используя на основании взаимного положения отрезков и плоскостей метрические соотношения между отдельными

отрезками фигуры. Задачу следует, по возможности, решать в общем виде, и лишь когда она в общем виде решена, следует вставить в полученную формулу числовые данные. После этого желательно провести исследование полученного решения.

Для примера последовательной записи выполняемых вычислений рассмотрим решение задачи:

Около прямой призмы, основанием которой служит равнобедренный треугольник со сторонами a, a и b, описан шар; высота призмы — h. Найти объем шара.

Для вычислений дано $a = 5{,}0$ *см*, $b = 6{,}0$ *см* и $h = 15$ *см*.

Делается от руки набросок чертежа (рис. 350); вспоминается формула объема шара:

$$V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ (куб. ед.)}. \qquad (1)$$

Как видно, для решения задачи требуется знать длину радиуса шара. Его можно определить из треугольника OO_1A, в котором $OA_1 = R$ и $OO_1 = \frac{h}{2}$; обозначив A_1O_1 через x, имеем:

$$R^2 = \frac{h^2}{4} + x^2. \qquad (2)$$

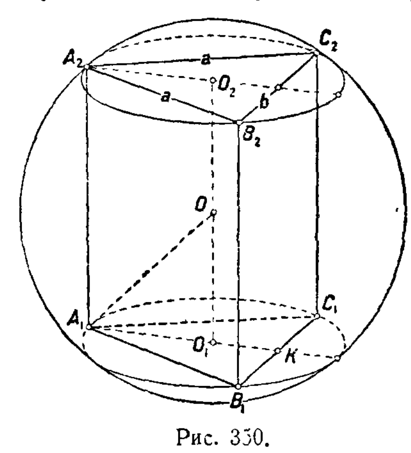


Рис. 350.

Итак, для вычисления радиуса R надо знать, чему равно $x = A_1O_1$. Но $x = A_1O_1$ есть радиус окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, стороны которого — a, a и b. Известно, что радиус x описанной около треугольника окружности вычисляется по формуле $\frac{abc}{4S}$, где S — площадь треугольника, а потому

$$x = \frac{a \cdot a \cdot b}{4 \cdot \frac{bH}{2}} \quad \text{или} \quad x = \frac{a^2}{2H}, \text{ где } H \text{ — высота треугольника.} \qquad (3)$$

Находим, что для вычисления x следует еще найти H — высоту треугольника.

$$H^2 = a^2 - \frac{b^2}{4} \quad \text{или} \quad H = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}. \qquad (4)$$

Подставляя найденное значение (4) в формулу (3), имеем:

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

Подставляя найденное для x значение в формулу (2), получаем:

$$R^2 = \frac{h^2}{4} + \frac{a^4}{4a^2 - b^2},$$

откуда

$$R=\sqrt{\frac{4a^2h^2-b^2h^2+4a^4}{4(4a^2-b^2)}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a^2h^2-b^2h^2+4a^4}{4a^2-b^2}}.$$

Подставляя, наконец, значение R в формулу (1) объема шара, находим:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{4a^2h^2-b^2h^2+4a^4}{4a^2-b^2}}\right)^3 \text{ (куб. ед.)}$$

или

$$V=\frac{1}{6}\pi\left(\sqrt{\frac{4a^2h^2-b^2h^2+4a^4}{4a^2-b^2}}\right)^3 \text{ (куб. ед.)}.$$

Формула для вычисления объема шара по заданным условиям задачи записана в общем виде. Подставляя в полученную формулу вместо a, b и h данные их числовые значения, а именно: $a=5{,}0$, $b=6{,}0$ и $h=15$, имеем:

$$V=\frac{1}{6}\pi\left(\sqrt{\frac{22500-8100+2500}{100-36}}\right)^3=\frac{1}{6}\pi\left(\frac{130}{8}\right)^3=\frac{\pi\cdot 2197000}{6\cdot 512}\approx$$

$$\approx 715{,}2\pi \text{ см}^3\approx 720\pi \text{ см}^3.$$

Запись:

$$\boxed{V_ш=\frac{4}{3}\pi R^3}$$ (1) $R=?$

$$R^2=\frac{h^2}{4}+x^2$$ (2) $x=?$

$$\boxed{R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot S}}$$

$$x=\frac{a\cdot a\cdot b}{4\cdot\frac{b\,H}{2}}=\frac{a^2}{2H}$$ (3) $H=?$

$$H^2=a^2-\frac{b^2}{4}$$

$$H=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-b^2}.$$ (4)

$$x=\frac{a^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}.$$

$$R^2=\frac{h^2}{4}+\frac{a^4}{4a^2-b^2}=\frac{4a^2h^2-b^2h^2+4a^4}{4(4a^2-b^2)}.$$

$$R=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{4a^2h^2-b^2h^2+4a^4}{4a^2-b^2}}.$$

$$V_ш=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{1}{8}\left(\sqrt{\frac{4a^2h^2-b^2h^2+4a^4}{4a^2-b^2}}\right)^3=$$

$$=\frac{1}{6}\pi\left(\sqrt{\frac{4a^2h^2-b^2h^2+4a^4}{4a^2-b^2}}\right)^3.$$

Вычисления:

$$4a^2h^2-b^2h^2+4a^4=22\,500-8100+2500=16\,900;$$

$$4a^2-b^2=100-36=64;$$

$$\sqrt{16900}=130;\quad \sqrt{64}=8;$$

$$V_ш=\frac{1}{6}\pi\left(\frac{130}{8}\right)^3=\frac{1}{6}\pi\left(\frac{65}{4}\right)^3\approx 715{,}2\pi\approx 720\pi \text{ см}^3.$$

Ответ. Объем шара равен $\approx 720\pi$ см^3.

Задачи и вопросы.

1. Сферическая поверхность сегмента равновелика кругу, радиус которого равен расстоянию полюса сегмента до окружности его основания. Доказать.

2. „Непрозрачный шар“ радиуса R освещается светящейся точкой, отстоящей от центра шара на расстоянии $R+a$, где R — радиус шара. Найти отношение освещенной части поверхности шара к неосвещенной.

3. Радиусы оснований шарового слоя a и b ($a \neq b$); радиус шара R. Найти поверхность шарового пояса.

4. Кривая поверхность шарового сегмента вдвое больше боковой поверхности вписанного в него конуса, имеющего с ним общее основание. Сколько градусов содержит дуга осевого сечения сегмента?

5. Полная поверхность правильного тетраэдра равна m^2. Найти поверхность описанного шара.

6. Основание полушара служит основанием конуса, боковая поверхность которого делит кривую поверхность полушара пополам. Найти угол, образованный образующей конуса с плоскостью его основания.

7. Цилиндр, радиус основания которого r и высота h, вписан в шар. Найти отношение боковой поверхности цилиндра к поверхности шарового пояса, заключенного между плоскостями оснований цилиндра.

8. В шар радиуса R вписан равносторонний цилиндр. Найти объемы частей, на которые шар делится поверхностью цилиндра.

9. В шар радиуса R вписано шесть равных шаров; каждый из них касается четырех других. Найти их радиусы.

10. Сектор (круговой) вращается вокруг диаметра, перпендикулярного к среднему радиусу сектора. Объем тела вращения равен $\frac{1}{n}$ объема шара. Найти угол сектора.

11. В полукруге диаметра $AB = 2R$ из точки A проведены хорды AC и AD так, что $\smile AC = \smile CD = \smile DB$ (рис. 351). Фигура, ограниченная хордами AC и AD и дугой CD, вращается вокруг диаметра AB. Найти поверхность и объем тела вращения.

12. Усеченный конус описан вокруг шара; образующая конуса равна l. Найти боковую его поверхность.

13. Высота конуса служит диаметром шара, поверхность которого делится поверхностью конуса пополам. В каком отношении делится боковая поверхность конуса?

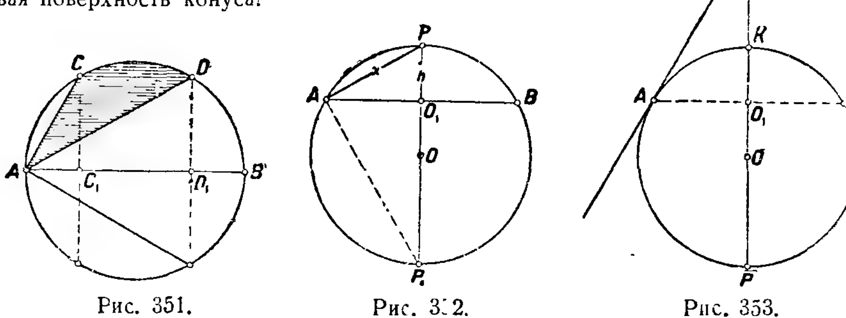


Рис. 351. Рис. 352. Рис. 353.

14. На расстоянии a от центра шара радиуса R проведена плоскость, и в каждый из полученных сегментов вписан шар наибольшего объема. Найти отношение суммы объемов вписанных шаров к объему данного шара.

Указания к задачам и вопросам.

1. Сферическая поверхность шарового сегмента (рис. 352)

$$S_{\text{сегм}} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot OP \cdot O_1P = \pi \cdot PP_1 \cdot O_1P.$$

Из треугольника PAP_1 имеем: $PP_1 : x = x : O_1P$, откуда $P_1P \cdot O_1P = x^2$, и, следовательно,

$$S_{\text{сегм}} = \pi x^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

2. Освещенная поверхность шара есть сферическая поверхность сегмента AKB (рис. 353), она равна $2\pi Rh$, а неосвещенная равна

$$4\pi R^2 - 2\pi Rh = 2\pi R(2R - h).$$

Находим отношение освещенной части шара к неосвещенной его части:

$$2\pi Rh : 2\pi R(2R-h) = h:(2R-h).$$

В данное отношение входит высота h, выразим ее через данные R и a. Известно, что $SP\cdot SK = SA^2$ или

$$(a+2R)a = SO_1^2 + AO_1^2 = (a+h)^2 + h(2R-h);$$

$$a^2 + 2Ra = a^2 + h^2 + 2ah + 2Rh - h^2;$$

$$2Ra = 2ah + 2Rh;$$

$$aR = ah + hR;$$

$$h = \frac{aR}{a+R}.$$

Кроме того,

$$2R - h = 2R - \frac{aR}{a+R} = \frac{aR+2R^2}{a+R} = \frac{R(a+2R)}{a+R}.$$

Находим искомое отношение сегментов; оно равно

$$h:(2R-h) = \frac{aR}{a+R} : \frac{R(a+2R)}{a+R} = a:(a+2R).$$

3. Поверхность шарового пояса равна $2\pi Rh$. Если основания слоя (рис. 354) находятся по одну сторону от центра, то

$$h = \sqrt{R^2-a^2} - \sqrt{R^2-b^2},$$

если же они находятся по разные стороны от центра шара, то

$$h = \sqrt{R^2-a^2} + \sqrt{R^2-b^2},$$

а потому

$$S_{\text{шар. п}} = 2\pi R\left(\sqrt{R^2-a^2} \pm \sqrt{R^2-b^2}\right) \text{ кв. ед.}$$

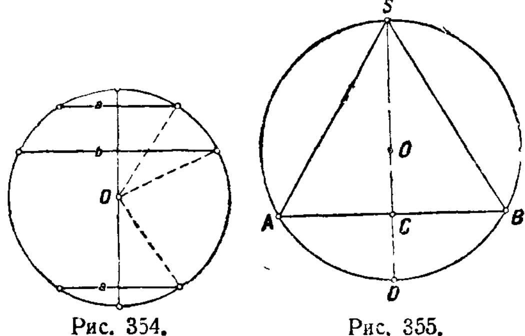


Рис. 354. Рис. 355.

4. Дан шаровой сегмент ASB и вписанный в него конус SAB (рис. 355). Пусть $OS = R$, $AC = r$, $SA = l$, $SC = h$.

По условию задачи: $2\pi Rh = 2\pi rl$ или $Rh = rl$, но $l^2 = 2Rh$, а потому $l^2 = 2rl$ и $l = 2r$.

Следовательно, $\triangle SAB$ — равносторонний, а потому $\smile ADB = 120°$ и $\smile ASB = 240°$.

5. Пусть дан правильный тетраэдр и описанный около него шар (рис. 356). Полная поверхность правильного тетраэдра равна $S_T = a^2\sqrt{3}$, где a — ребро тетраэдра; по условию задачи $a^2\sqrt{3} = m^2$, откуда ребро $a = \frac{m}{\sqrt[4]{3}}$.

Находим:

$$AO_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \text{и} \quad DO_1 = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a}{3}\sqrt{6}.$$

Из прямоугольного треугольника AO_1O имеем:

$$R^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3} - R\right)^2 \quad \text{или} \quad R^2 = \frac{3a^2}{9} + R^2 + \frac{6a^2}{9} - 2\cdot\frac{aR\sqrt{6}}{3},$$

откуда

$$\frac{2aR\sqrt{6}}{3}=a^2 \quad \text{и} \quad R=\frac{3a}{2\sqrt{6}}=\frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Найдя R шара, вычисляем его поверхность.

$$S_ш=4\pi R^2=4\pi\cdot\frac{6a^2}{16}=\frac{3\pi a^2}{2}=\frac{3\pi m^2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\pi m^2\sqrt{3} \text{ кв. ед.}$$

6. Строим треугольник ASB — осевое сечение конуса — и на его основании AB строим полуокружность (рис. 357).

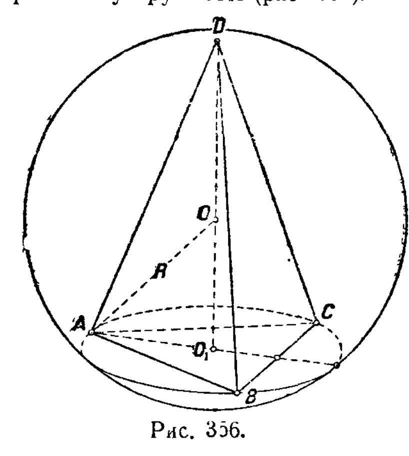


Рис. 356.

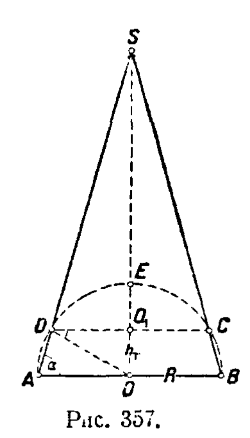


Рис. 357.

Пусть $OB=R$, $OO_1=h_1$. Из условия задачи следует, что сферическая поверхность сегмента DEC равна половине кривой поверхности полушара, или одной четверти поверхности шара.

Итак,

$$2\pi R\cdot(R-h_1)=\pi R^2 \quad \text{или} \quad 2(R-h_1)=R, \text{ откуда } h_1=\frac{R}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника OO_1D имеем, что $\angle ODO_1=30°$, так как $OO_1=\frac{OD}{2}$, а потому и $\angle DOA=30°$; наконец, находим из равнобедренного треугольника AOD, что

$$\angle\alpha=\frac{180°-30°}{2}=75°.$$

7. Пусть радиус шара равен R.

Имеем:

$$S_{б.\,ц}=2\pi rh \quad \text{и} \quad S_{ш.\,пояса}=2\pi Rh.$$

Находим искомое отношение:

$$S_{б.\,ц}:S_{ш.\,п}=2\pi rh:2\pi Rh=r:R.$$

Радиус шара не дан, его следует выразить через данные ***r* и *h*.**

$$R^2=r^2+\frac{h^2}{4}=\frac{4r^2+h^2}{4} \quad \text{и} \quad R=\frac{\sqrt{4r^2+h^2}}{2}.$$

Итак,

$$S_{б.ц}:S_{ш.\,п}=r:R=r:\frac{\sqrt{4r^2+h^2}}{2}=2r:\sqrt{4r^2+h^2}.$$

Для большей наглядности взаимного расположения отдельных элементов заданных тел следует предложить учащимся дать изображение осевого сечения цилиндра и описанной около него окружности.

8. Строим сечение шара — большой круг. Осевое сечение цилиндра лежит в той же плоскости (рис. 358). Поверхностью цилиндра шар делится на 4 части: цилиндр $ABCD$, шаровое „кольцо", образуемое вращением сегмента DKA, и два шаровых сегмента DPC и AP_1B.

Радиус r цилиндра равен $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, высота H цилиндра равна $R\sqrt{2}$, следовательно,

$$V_{\text{цил}} = \pi r^2 H = \pi\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot R\sqrt{2} = \frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2} \text{ куб. ед.}$$

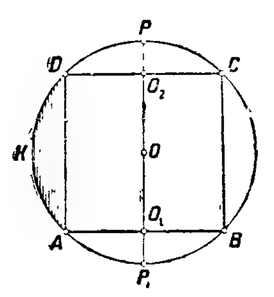


Рис. 358.

Объем шарового кольца равен

$$V_{\text{ш. кол}} = \frac{1}{6}\pi(R\sqrt{2})^3 = \frac{\pi R^3\sqrt{2}}{3} \text{ куб. ед.}$$

Сумма объемов обоих сегментов равна

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \left(\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi R^3\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{5}{6}\pi R^3\sqrt{2} =$$

$$= \frac{1}{6}\pi R^3(8 - 5\sqrt{2}) \text{ куб. ед.,}$$

откуда находим

$$V_{\text{ш. сегм}} = \frac{1}{12}\pi R^3(8 - 5\sqrt{2}) \text{ куб. ед.}$$

9. Данная задача требует от учащихся хорошего пространственного представления. Можно рекомендовать следующий подход. Пусть имеется куб, впишем в него шар; если соединить центр шара, который является и центром куба, со всеми вершинами куба, то получим шесть пирамид с общей вершиной в центре шара или куба и основаниями — гранями куба. Вписав шар в каждую из пирамид, получим искомое построение; каждый из шаров, вписанный в пира-

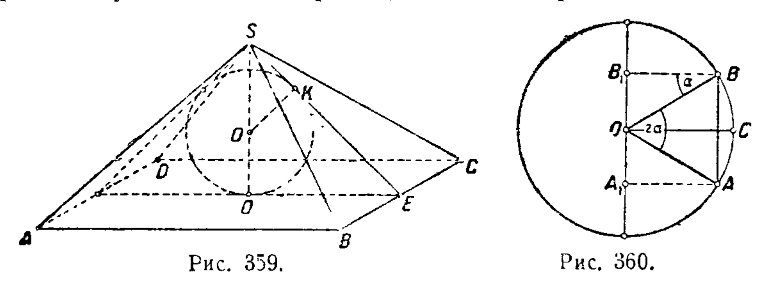


Рис. 359. Рис. 360.

миду, касается данного шара и четырех остальных, вписанных в пирамиды и в шар.

Сторона основания пирамиды равна ребру куба или $2R$ шара, вписанного в куб; высота пирамиды равна R, боковое ребро равно половине диагонали куба, а именно $\frac{1}{2}\cdot 2R\sqrt{3} = R\sqrt{3}$ (рис. 359). Треугольник SOK — прямоугольный и равнобедренный, а потому $OK = SK$. Обозначив OK через x, имеем:

$$x^2 + x^2 = (R - x)^2, \quad \text{откуда}$$

$$2x^2 = R^2 + x^2 - 2Rx; \quad x^2 + 2Rx - R^2 = 0;$$

$$x = -R \pm \sqrt{R^2 + R^2} = -R \pm R\sqrt{2};$$

$$x_1 = R(\sqrt{2} - 1) \text{ и } x_2 = -R(\sqrt{2} + 1).$$

Отрицательное значение x не удовлетворяет условию задачи

Итак, радиус каждого из шести шаров, вписанных в данный шар, равен $R(\sqrt{2}-1)$.

10. Обозначим радиус шара через R (рис. 360), угол сектора через 2α, высоту сектора B_1A_1 через $2h$.

$$V_{\text{сект}}=\frac{2}{3}\pi R^2\cdot 2h=\frac{4}{3}\pi R^2 h$$

и

$$V_{\text{ш}}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Согласно условию

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^2 h}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{1}{n} \quad \text{или} \quad \frac{h}{R}=\frac{1}{n}.$$

Из треугольника OB_1B имеем: $\frac{h}{R}=\sin\alpha$, и, следовательно, $\sin\alpha=\frac{1}{n}$, а потому $\alpha=\arcsin\frac{1}{n}$; при $n=2$ имеем: $\alpha=30°$ и $2\alpha=60°$.

11. Как видно из рисунка 351, $S_{\text{т}}=S_{AC}+S_{CD}+S_{AD}$.

S_{AC} — площадь боковой поверхности конуса, у которого

$$l=R \text{ и } r=CC_1=\frac{1}{2}R\sqrt{3},$$

S_{CD} — площадь поверхности шарового пояса, у которого

$$h=C_1D_1=R,$$

S_{AD} — площадь боковой поверхности конуса, у которого

$$l_1=AD=R\sqrt{3} \quad \text{и} \quad r=\frac{1}{2}R\sqrt{3},$$

потому

$$S_{\text{т}}=\pi\cdot\frac{1}{2}R\sqrt{3}\cdot R+2\pi R\cdot R+\pi\cdot\frac{1}{2}R\sqrt{3}\cdot R\sqrt{3}=$$

$$=\frac{1}{2}\pi R^2\sqrt{3}+2\pi R^2+\frac{3}{2}\pi R^2=\frac{1}{2}\pi R^2(\sqrt{3}+7) \text{ кв. ед.}$$

$$V_{\text{т}}=V_{AC}+V_{CD}-V_{AD}.$$

V_{AC} — объем конуса, у которого

$$r=CC_1=\frac{1}{2}R\sqrt{3} \quad \text{и} \quad h=AC_1=\frac{R}{2},$$

V_{CD} — объем шарового слоя, у которого

$$r_1=r_2=\frac{1}{2}R\sqrt{3} \quad \text{и} \quad h_1=R,$$

V_{AD} — объем конуса, у которого

$$r_1=DD_1=\frac{1}{2}R\sqrt{3} \quad \text{и} \quad h_2=AD_1=\frac{3}{2}R,$$

а потому

$$V_{\text{т}}=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3}{4}R^2\cdot\frac{R}{2}+\pi\cdot\frac{3}{4}R^2\cdot R+\frac{1}{6}\pi R^3-\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3}{4}R^2\cdot\frac{3}{2}R=$$

$$=\frac{1}{8}\pi R^3+\frac{3}{4}\pi R^3+\frac{1}{6}\pi R^3-\frac{3}{8}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi R^3 \text{ куб. ед.}$$

12. $S_{\text{бок. ус. к}} = \pi (R + r) l.$

Осевое сечение конуса — равнобедренная описанная трапеция, а потому

$$l + l = 2R + 2r \quad \text{или} \quad l = R + r$$

и

$$S_{\text{бок. ус. к}} = \pi l^2 \text{ кв. ед.}$$

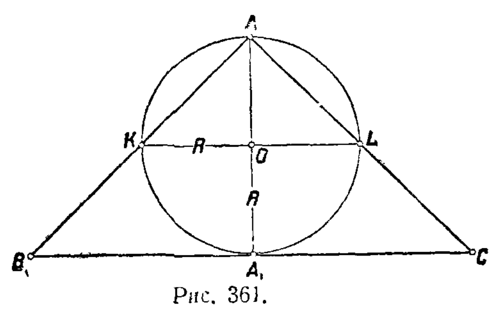


Рис. 361.

13. Согласно условию, поверхность шара делится поверхностью конуса пополам, следовательно, окружность, по которой поверхность конуса делит поверхность шара, есть окружность большого круга (рис. 361).

$$S_{\text{бок. кон.} ABC} = \pi \cdot 2R \cdot 2R\sqrt{2} = 4\pi R^2\sqrt{2},$$

так как

$$A_1B = AA_1 = 2R$$

и

$$AB = 2R\sqrt{2}.$$

$$S_{\text{бок. кон.} AKL} = \pi R \cdot R\sqrt{2} = \pi R^2\sqrt{2}.$$

Искомое отношение равно

$$\pi R^2\sqrt{2} : (4\pi R^2\sqrt{2} - \pi R^2\sqrt{2}) = 1:3.$$

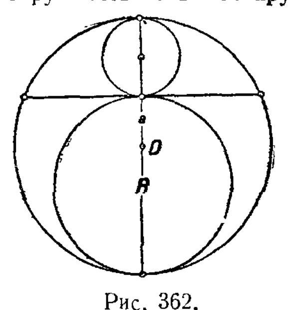


Рис. 362.

14. Сечение заданной фигуры дано на рис. 362. Из условия задачи имеем:

$$\frac{\frac{4}{3}\pi \cdot \frac{(R-a)^3}{8} + \frac{4}{3}\pi\frac{(R+a)^3}{8}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{2R^3 + 6Ra^2}{8R^3} = \frac{R^2 + 3a^2}{4R^2}.$$

Если $R = 3a$, то имеем: $\frac{9a^2 + 3a^2}{36a^2} = \frac{12}{36} = 1:3.$

ЛИТЕРАТУРА.

1. *Евклид*, Начала, Киев, 1880.
2. *Архимед*, 1) Две книги о шаре и цилиндре, СПБ, 1823; 2) Измерение круга (в книге Рудио, О квадратуре круга, М., 1934); 3) Новое сочинение Архимеда, Одесса, 1909.
3. *Кеплер*, Стереометрия бочек, Москва, 1935.
4. *Рудио Ф*, О квадратуре круга, М., 1934.
5. *Лежандр А. М.*, Элементы геометрии, СПБ., 1887.
6. *Лобачевский Н. И.*, 1) Геометрия (для гимназии), Казань, 1823; 2) Новые начала геометрии с полной теорией параллельных, Харьков, 1912.
7. *Гильберт Д.*, Основания геометрии, П., 1923.

---

1. *Вебер и Вельштейн*, Энциклопедия элементарной математики, т. II, кн. 1 и 2, Одесса, 1913.
2. *Клейн Ф.*, Элементарная математика с точки зрения высшей, т. 2, Геометрия, М., 1934.
3. *Энриквес*, Вопросы элементарной геометрии, СПБ, 1913.
4. *Каган В. Ф.*, 1) Основания геометрии, т. 1 и 2, Одесса, 1905; 2) О преобразовании многогранников, М., 1933.

5. *Богомолов С. А.*, 1) Основания геометрии, М., 1923, 2) Эволюция геометрической мысли, Л., 1928.

6. *Александров П. С. и Ефремович В. А.*, О простейших понятиях современной топологии, М., 1935.

7. *Fladt K.*, Elementargeometrie, Leipzig, 1928.

8. *Killing W.* und *Hovestadt H.*, Handbuch des mathematischen Unterrichts, Leipzig, 1910.

---

1. *Дюгамель*, Методы геометрии, СПБ, 1880.

2. *Шохор-Троцкий С. И.*, Геометрия на задачах, Книга для учителей, М., 1913.

3. *Маркович Б. А.*, Геометрия пространства, ч. I, книга преподавателя, М., 1910.

4. *Извольский Н.*, Методика геометрии, П., 1924.

5. *Дианина Н. Н.*, Опыт наглядного ознакомления с основными понятиями теории пределов, П., 1922.

6. *Попруженко М.*, Материалы по методике анализа бесконечно-малых, П., 1912.

7. *Карасев П. А.*, Учебно-наглядные пособия по математике и методика работы с ними в средней школе, М., 1933.

8. Учебные пособия и оборудование, вып. IV, Математика и черчение, Госкультснаб, М., 1934.

9. Giebel K., Mathematische Modelle. Leipzig, 1915.

10. Журналы: 1) „Математический вестник", издаваемый Н. А. Извольским с 1914 по 1917 г.; 2) „Математическое образование" с 1912 по 1917 и с 1928 по 1930 г.; 3) „Математика в школе", непериодическое издание, №№ 1—6, Л., 1924—1926; 4) „Физика и математика в школе", 1927—1935; 5) Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Gattungen.

---

1. *Адлер А.*, Теория геометрических построений, Одесса, 1922.

2. *Александров И. И.*, Геометрические задачи на построение и методы их решения, М., 1934.

3. *Петерсон Ю.*, Методы и теория решения геометрических задач на построение, Харьков, 1883.

4. *Берг М. Ф.*, Приемы решения геометрических задач на построение, М., 1935.

5. *Четверухин Н. Ф.*, 1) Введение в высшую геометрию, М., 1934; 2) Геометрические построения и приближения, М., 1935.

6. *Глаголев А. Н.*, Сборник геометрических задач на построение, М., 1911.

7. *Kerst B.*, Methoden zur Lösung geometrischen Aufgaben, Berlin, 1925.

8. *Zühlke P.*, Konstruktionen in begrenzter Ebene, Berlin, 1913.

9. *Калецкий С. Ю.*, Черчение с элементами начертательной геометрии, М., 1935.

---

1. *Давидов А. Ю.*, Элементарная геометрия, М., 1913.

2. *Киселев А. П.*, Элементарная геометрия, М., 1917.

3. *Извольский Н. А.*, 1) Геометрия на плоскости, Л., 1924; 2) Геометрия в пространстве, Л., 1923.

4. *Филлипс и Фишер*, Элементы геометрии, П., 1919.

5. *Борель Э.*, Элементарная геометрия, ч. II, Геометрия, Одесса, 1922.

6. *Герхер Б.*, Учебник элементарной геометрии, вып. I и II, М., 1922

7. *Глазер Р.*, 1) Стереометрия; 2) Задачник по стереометрии, Рига, 1923.

8. *Бонола Р.*, Неевклидова геометрия, СПБ, 1910.

9. *Лукьянченко С.*, Элементы неевклидовой геометрии Лобачевского—Болье, М., 1933.

10. *Бальдус Р.*, Неевклидова геометрия, М., 1933.

11. *Hadamard I.*, Leçons de géometrie élémentaire, Paris, 1933.

12. *Enriques et Amaldi*, Elementi di geometria, Bologna, 1919.

13. *Lörcher O. und Löffler E.*, Leitfaden und Aufgabensammlung der Geometrie, Leipzig, 1929.

14. *Fenkner und Holzmüller*, Geometrie, Berlin, 1926 27.

БИБЛИОТЕКА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

1. *Фурре Е.*, Геометрические головоломки и паралогизмы, Одесса, 1912.
2. *Литцман В., и Трир Ф.*, Где ошибка?, П., 1920.
3. *Литцман В.*, Теорема Пифагора, М., 1935.
4. *Вульф Г. В.*, Симметрия и ее проявление в природе, М., 1908.
5. *Тиммердинг Г. Е.*, Золотое сечение, П., 1924.
6. *Перельман Я. И.*, Занимательная геометрия, Л., 1935.
7. *Попов Г. Н.*, Исторические задачи, М., 1932.
8. *Лямин А. А.*, Физико-математическая хрестоматия, т. III, Геометрия, кн. 1 и 2, М., 1914.
9. *Лебедев В. И.*, 1) Кто автор первых теорем геометрии, М., 1916; 2) Знаменитые геометрические задачи древности, М., 1917.
10. *Игнатьев Е. И.*. В царстве смекалки, кн. 1, 2, 3, М., 1922.
11. *Люстерняк Л. А.*, Геодезические линии, М., 1934.
12. *Воронец А. М.*, Геометрия циркуля, М., 1934.
13. *Иозлев Н. Н.*, Введение в элементарную геометрию и тригонометрию Лобачевского, М., 1930.
14. *Чвалина А.*, Архимед, М., 1934.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Стр.

VII. Многогранные углы. Методика вопроса.

VIII. Многогранники. Методика вопроса.

IX. Поверхности многогранников. Методика вопроса.

X. Объемы многогранников. Методика вопроса.

XI. Круглые тела. Методика вопроса.

ЗАМЕЧЕННАЯ ОПЕЧАТКА

На стр. 128, строка 24 сверху напечатано: „спектроскоп“, должно быть: „стереоскоп“,